昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2011年３月１日発行　第49巻３号　毎月１回１日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

3
2011

特集　方程式と現代代数学
代数で語る方程式の面白さ



No.573
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 573 March 2011

方程式と現代代数学

代数で語る方程式の面白さ

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7〜2008 年/5 省略
2008 年/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法

数理科学臨時別冊一覧

09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界
10 年/3 超関数・フーリエ変換入門
10 年/5 問題例で深める物理
10 年/6 非線形現象と微分方程式
10 年/7 数物系のための圏論
10 年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10 年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10 年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10 年/12 行列解析の基礎
11 年/1 超弦理論の基礎

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

March 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 573

特集／方程式と現代代数学

方程式をめぐる代数の世界

桂 利行

未知の数や未知の関数などの間に成り立つ関係を数学的な記号を用いて表した等式を方程式と言う．方程式が多項式でできていれば代数方程式，未知の関数に関する方程式であれば関数方程式，未知の関数の微分を含む等式であれば微分方程式，等式が未知の関数の積分を含めば積分方程式などと言う．一般には，微分と積分が等式の中に両方入っているというような複合的なケースもある．その歴史は古く，紀元前22世紀にはバビロニアにおいて2次方程式が扱われていたという記録があり，紀元前17世紀にはエジプトで世界最古の数学書と言われるアーメスのパピルスに未知数を含む1次方程式の記録が残されている．また，17世紀にニュートンとライプニッツにより微分法が発見されて以来，古典力学におけるニュートンの運動方程式，電磁気学におけるマックスウェルの電磁方程式，量子力学におけるシュレーディンガー方程式などは，基本的な微分方程式として応用上も重要な役割を果たしていることは周知の事実である．この特集号では，このような方程式の代数的側面の入門的な世界を総括的にご紹介する．

まず取り上げるのは連立1次方程式である．これは，線形代数の中心的は対象であり，行列を用いてすでに完成された理論がある（本特集号の木村俊一氏の論説参照）．多項式の次数をあげると代数方程式の理論になる．n を自然数，n を変数とするとき，複素数を係数とする n 次代数方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

が複素数の範囲に必ず解をもつことは1799年にガウスの学位論文によって示された．言い換えると，複素数を係数とする n 次多項式は，必ず1次式の積に因数分解されるということである．その後，この定理にはいくつもの証明が考案されており，ガウス自身も4つの異なる証明を与えている（本特集号の清水勇二氏の論説参照）．係数に有限回の四則演算と根号を施して代数方程式の解を表すことを，その方程式の代数的解法と言う．n 次代数方程式に代数的解法が存在するかという問題は解の存在とは独立した問題である．2次方程式に解の公式があることは古くから知られていたが，3次以上の方程式に解の公式がつくれるかという問題は中世には大きな問題であった．16世紀になって，3次方程式についてはカルダノによって，4次方程式についてはフェラーリによって，解の公式が発表された．3次方程式については，カルダノはタルタリアから公表しない約束で公式を教えてもらったが，約束を破って彼の著書『アルス・マグナ』に公式を発表してしまったという逸話も残されている（本特集号の小林正典氏の論説参照）．5次以上の方程式に代数的解法が存在しないことを初めて示したのはノールウエイの数学者アーベル

である．これは19世紀前半のことであった．ほぼ同時期にフランスの数学者ガロアは，方程式の解の公式の存在が群という代数系の可解性の問題に帰着することを発見した．現在では，このガロアの理論は体の拡大と群の関係として捉えられ，最も美しい数学の理論の一つに数えられている（本特集号の三宅克哉氏の論説参照）．代数方程式の解が満たす微分方程式，正標数における超特異楕円曲線を定めるルジャンドル多項式が満たす超幾何微分方程式の話題など，数論と微分方程式には不思議な関係がある（本特集号の落合啓之氏，伊吹山知義氏の論説参照）．

方程式について重要なのは，方程式そのものもさることながら，解をどの範囲で求めるかということである．例えば，代数方程式の場合，整数係数の方程式が整数の範囲に解を持つのか，有理数の範囲に解を持つのか，実数の範囲で解を考えるのか，複素数の範囲で解を考えるのか，などによって問題の性質が変わってくる．有名なフェルマーの最終定理と呼ばれていた予想は，n を3以上の整数とするとき

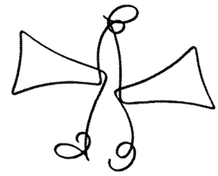
$$X^n + Y^n = Z^n$$

という方程式は，$XYZ \neq 0$ となる整数解を持たないであろうという予想である．これは，方程式の整数解を調べる不定方程式の問題であるが，この方程式に整数解が存在しないことは1994年にテイラーの助けを得てワイルズによって示された．また，特異点のない射影代数曲線を連続的に変形すれば，いくつか穴のあいた浮き袋のような形になることが知られているが（閉曲面の理論），この穴の数を代数曲線の種数と言う．有理数を係数とする特異点のない射影代数曲線を考え，その解を有理数体上で考えればやはり不定方程式の問題になる．このような射影代数曲線の種数が2以上ならば，不定方程式の有理整数解は有限個であろうという予想が1920年代に作られたが（モーデル予想），この予想は1983年にファルティングスによって肯定的に解決された．実数体や複素数体，あるいは代数的閉体上でいくつかの代数方程式を考えよう．それらの共通零点がなす幾何学的な図形は代数幾何学という分野の研究対象である．このような図形は代数多様体と呼ばれ，深く研究されて壮大な理論が構築されている．

自然界を記述する方程式として微分方程式は不可欠の役割を担っているが，微分方程式の世界においても，代数的な手法が有効に働くいろいろな理論が存在する．線形常微分方程式の解法は線形代数における行列の問題に帰着する（本特集号の加藤晃史氏の論説参照）．線形常微分方程式の理論は代数学が微分方程式において成功を収めた初等的な例と言えよう．本特集号では取り上げないが，微分ガロア理論は初等関数とは何かという問題に代数的手法で解答を与えるし，近年盛んに研究されているパンルベ方程式の解の構造や初期値問題の解析などにも代数的手法が有効に用いられている．また，1970年頃から盛んになった佐藤超関数の理論は，層のコホモロジー理論を駆使する代数的手法で偏微分方程式を扱い，大きな成果をあげて，代数解析という一つの分野を創成した．そこから生まれたD加群の理論は，強力な道具として表現論にも応用されている．微分方程式の解析的な理論は，本特集号の守備範囲を超えた膨大な理論であり，方程式の別の側面として将来取り上げられるべきものであろう．本特集号から，方程式をめぐる代数の世界の馥郁たる香りを感じ取っていただければ幸いである．

（かつら・としゆき，法政大学理工学部）

行列と1次方程式



木村　俊一

1. 小学生でも解ける数学

1 変数で 1 次方程式の解法を初めてシステマティックに論じたのが，7 世紀から 8 世紀にアッバース朝カリフ帝国の首都バグダッドで活躍したアル・フワリズミだ．アル・ジャーブル（移項）とアル・ムカーバラ（同類項をまとめること）により，1 次方程式の問題は割り算に帰着される．x とか t とかを使うと中学の数学っぽいが，□とか◯とかを使えば小学校の算数でも扱えないことはない．アル・ジャーブルがアルジェブラ＝代数の語源となり，アル・フワリズミがアルゴリズムの語源となったことを見ても，アル・フワリズミが計算代数の出発点になったことが感じられる．

多変数にすると中学生レベル，さらに行列を使うと高校生レベルの話に聞こえるが，その本質は次の「算数」の問題の解法に既に現れている．

「みかんを 3 袋とりんごを 5 個買うと 1155 円で，みかんを 5 袋とりんごを 4 個買うと 1470 円でした．みかん 1 袋とりんご 1 個はそれぞれ何円でしょう？」

(みかん 3 袋+りんご 5 個 $=$ 1155 円)×5 で

みかん 15 袋とりんご 25 個が 5775 円

である．また

(みかん 5 袋+りんご 4 個 $=$ 1470 円) $\times 3$ で

みかん 15 袋とりんご 12 個が 4410 円

である．差を取れば，りんご 13 個で 1365 円，よってりんご 1 個で $1365 \div 13 = 105$ 円，みかん 1 個で $(1155 - 105 \times 5) \div 5 = 210$ 円となることがわかる．要するに「式を 1 個使えば，変数を 1 個消去することができる」という原則に従って計算していけば，最後は 1 変数になるので割り算で解けてしまう．大学の線形代数では，行列式とか基底とかの込み入った概念も扱うけど，具体的な方程式を解く最も効率の良い方法，つまりガウスの掃き出し法は「式 1 個を使って変数 1 個を消去していく」という，小学校の算数と同じ原則に基づいている．

現代代数学と方程式，という脈絡の中で，1 次方程式に関して大事なことは，「とにかく解ける，計算できる」という事実だ．解がなければ解がないことが証明できるし，逆に解が無限個あれば，パラメーターを使って一般解を具体的に書き下すことができる．考えている問題を行列や 1 次方程式の問題に帰着できれば解けたも同然，と思えるようになれば良い．

2. ガウスの掃き出し法

ガウスの掃き出し法による連立 1 次方程式の解法を確認しておこう．n 変数の 1 次式が m 個与えられたとする．移項して同類項をまとめ，変数は左辺に定数は右辺に集めることにする．（アル・ジャーブルとアル・ムカーバラだ！）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

左辺が 0 でない式を一つ取り（普通は最初はどの式も左辺が 0 でない），その 0 でない項を一つ固定して，**ピボット**と名付ける．これに対して次の操作を行う．

[手順 1]　ピボットを持つ式の定数倍を他の式に加えることで，他の式にはピボットの変数が現れないようにする．

この操作の後で，まだ他に，ピボットを持たず，しかも左辺が 0 でない式が残っていれば，そのような式を 1 つ取り，その 0 でない項をピボットとし，そのピボットに対して再び手順 1 を行う．これを，ピボットを持たないすべての式の左辺が 0 になるまで繰り返す．

この操作が終わったら，次にピボットの係数を 1 にそろえよう．

[手順 2]　ピボットを持つ式を，ピボットの係数で割る．つまり，ピボットの係数の逆数 ($\neq 0$) をかける．

そして体裁を整えるために，式の順番を並べ替えよう．

[手順 3]　ピボットに現れる変数の添字の順番になるように，式の順序を入れ替える．

最後に，ピボットでない変数をすべて右辺に移項する．都合により，これは手順番号はつけない．これで計算は完了だ．そして，方程式の解は次のように読み取ることができる．

[ケース 1]　左辺が 0 で，右辺が 0 でない式がある場合，この連立方程式には解がない．

この場合，右辺は 0 でない定数となっている．上の手順は，与えられた式をそれぞれ何倍かして足したり引いたりして組み合わせるだけの操作で，それで [0] = [0 でない数] という等式が得られたので，方程式に矛盾があることが示されている．

[ケース 2]　左辺が 0 となる式はすべて右辺も 0 となる場合，そのような $0 = 0$ という形の式をすべて無視する．そうすると残りの式は，

(ピボットの変数)

= (ピボットに現れない変数の式)

という形をしているので，ピボットに現れない変数をすべてパラメーターと見なせば，得られている式は，既に一般解のパラメーター表示となっている．

具体例でやってみよう．定数 a の値は後で定めることにして

$$\begin{cases} \quad\;\; -y + 2z = -1, \\ x - y - z = -3, \\ 3x - 4y - z = a \end{cases}$$

という連立方程式を考える．この方程式が解を持つように a の値を定め，そのときの一般解を求めよ，という問題である．

まず 2 番目の式の項 x をピボットとして手順 1 を施すと

$$\begin{cases} \quad\;\; -y + 2z = -1, \\ x - y - z = -3, \\ \quad\;\; -y + 2z = 9 + a \end{cases}$$

となる．次に 1 番目の式の項 $-y$ をピボットとして手順 1 を施すと

$$\begin{cases} \quad\;\; -y + 2z = -1, \\ x \qquad\; - 3z = -2, \\ \qquad\qquad\; 0 = 10 + a \end{cases}$$

となる．手順 2 により

$$\begin{cases} \quad\;\; y - 2z = 1, \\ x \qquad - 3z = -2, \\ \qquad\qquad 0 = 10 + a. \end{cases}$$

さらに手順 3 により

$$\begin{cases} x \qquad - 3z = -2, \\ \quad\;\; y - 2z = 1, \\ \qquad\qquad 0 = 10 + a. \end{cases}$$

最後に，手順番号はついていないが z の項を右辺に移項して

$$\begin{cases} x = -2+3z, \\ y = 1+2z, \\ 0 = 10+a \end{cases}$$

となる．これにより，方程式が解を持つのは $a = -10$ の場合，そしてその場合に限り，解があるときは z をパラメーターとして

$$(x, y, z) = (-2+3z, 1+2z, z)$$

が一般解となることがわかった．

3. 逆行列の計算

行列なしで連立方程式の一般解法が説明できてしまったが，では行列のありがたみというのは何なのだろうか？ まず，変数を書く手間が省けるので，計算時間が短縮できる．数学的には何の意味もないが，実際に便利だ．紀元前後に成立したとされる古代中国の数学書『九章算術』で，既にそのような意味での行列を使ってガウスの掃き出し法が紹介されているという．数学的に意味があるメリットで言うと，逆行列があげられる．19 世紀にケイリーが 2×2 行列で逆行列を用いたのが最初だ．一般の 1 次方程式だと解がなかったり，パラメーター表示が必要だったりするが，係数が十分デタラメで，変数の個数と式の個数が同じであれば，逆行列をかけ算しさえすれば唯一の解が求まる．逆行列さえ計算しておけば，行列とベクトルをかけ算するだけで，連立方程式の解が求まってしまうわけだ．では，その場合はガウスの掃き出し法は不要か，と言うと話は逆で，ガウスの掃き出し法を使うのが最も効率の良い逆行列の計算方法だ．掃き出し法を使って逆行列を求める計算方法を確認しておこう．

n 変数について m 個の式を連立した連立方程式は，$m\times n$ 行列 A と n 次元変数ベクトル $\boldsymbol{x}$，それに m 次元定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ により $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表される．上記手順の 1 から 3 は，行列の言葉に翻訳すると，ブロック行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ に対して基本行変形と呼ばれる変形を施すことで実現できる．

行変形 1　1 つの行の定数倍を他の行に加える．

行変形 2　行に 0 でない定数をかける．

行変形 3　2 つの行を取り替える．

ポイントは，これらの行変形が，左から適当な行列をかける操作として実現できる，ということだ．例えば高さが 3 行の行列に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列を左からかけると，3 行目の a 倍を 2 行目に加える，という効果が得られる．同様に

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，B を左からかけると 1 行目が b 倍になり，C を左からかけると 2 行目と 3 行目が入れ替わる．行変形によって連立方程式を解く，という操作は，このような基本的な行列を次々と左からかけていって，行列をできるだけ簡単な形に書き換える，という操作を行っていると思うことができるのである．

さて，A が逆行列を持つような正方行列であったとしよう．このとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ という解をただ 1 つだけ持つので，自由変数は現れない．よって手順 1 にあたる行変形を行っていくと，すべての変数がピボットとして現れ，変数の個数と式の個数が同じなので，すべての式がピボットを持つことになる．各行，各列がそれぞれ 1 つだけピボットを持ち，他の成分はすべて 0，という行列に変形されているはずである．次に手順 2 により各行を定数倍して，ピボットは 1，他は 0，という行列に変形される．最後に手順 3 に従って行を入れ替えると対角成分が 1 で他の成分は 0，つまり単位行列に変形されることになる．方程式を解く際にはこれをブロック行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ に対して行うわけだが，同じ行変形をブロック行列 $[A|E]$ に対して行ってみよう．但し E は A と同じサイ

ズの単位行列である．左からどんどん行列をかけていって，A が単位行列に変形できたとすると，結局それは左から A の逆行列をかけたことになっているので，E に対して同じ変形を施す，つまり同じ行列をかけた結果は A の逆行列に A^{-1} になっているはずだ．かくして，行変形 1，2，3 によってブロック行列 $[A|E]$ を $[E|B]$ に変形できたとすると，求まった行列 B が A の逆行列になっているのである．

4. 行列式と逆行列の公式

逆行列が計算できることはわかったが，代入すれば一発で逆行列が出てくるような公式はないのだろうか？ 公式はあるが，まず行列式という準備が必要だ．(i,j) 成分が $a_{i,j}$ となる $n\times n$ 行列 $A=(a_{i,j})$ に対してその**行列式** $\det A$ を

$$\det A=\sum_{\sigma}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

と定義する．行列式は，次の基本的な性質を持つ．

(1) 各列に関して n 重多重線形である．つまり，$1\le i\le n$ なる i を 1 つ取り，i 列目だけ定数 c 倍して，他の列は変えなければ，行列式は c 倍になる．また，i 列目以外は同じとして，i 列目を v とした行列を A，i 列目を w とした行列を B，i 列目を $v+w$ とした行列を C とすると，$\det A+\det B=\det C$ である．

(2) 2 つの列を入れ替えると，行列式は -1 倍になる．

(3) 単位行列の行列式は 1 である．

逆に上記 (1)〜(3) の条件を満たす関数は行列式に限ることがわかる．$A=(a_{i,j})$ の行列式 $\det A$ において，j 列目だけ，つまり $a_{1,j},a_{2,j},\ldots,a_{n,j}$ を変数と見て，その係数を考えると係数が再び行列式の言葉で表すことができる．すなわち行列 A の第 i 行と第 j 列を取り除いて作った $(n-1)\times(n-1)$ 行列を $A_{(i,j)}$ と書くことにすると，

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det A_{(i,j)}a_{i,j}$$

というように，係数が，より小さい行列の行列式として表される．この等式は，A の行列式を j 列目について展開した等式と呼ばれ，$\det A_{(i,j)}$ は A の小行列式と呼ばれる．そこで第 (i,j) 成分を $(-1)^{i+j}\det A_{(j,i)}$ とした行列

$$\begin{pmatrix} \det A_{(1,1)} & -\det A_{(2,1)} & \cdots & \pm\det A_{(n,1)} \\ -\det A_{(1,2)} & \det A_{(2,2)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \pm\det A_{(1,n)} & \cdots & & \det A_{(n,n)} \end{pmatrix}$$

を $\tilde{A}$ と書き，A の**余因子行列**と呼ぶ．(i,j) の順番が逆なので，気をつけよう．j 行 i 列を取り除いた行列の行列式が (i,j) 成分のところに来ている．この行列に右から A をかけるとどうなるか，計算してみよう．まず (i,i) 成分を計算してみると，

$$(-1)^{1+i}\det A_{(1,i)}a_{1,i}+(-1)^{i+2}\det A_{(2,i)}a_{2,i}+\cdots+(-1)^{n+i}\det A_{(n,i)}a_{n,i}$$

となり，これはまさに A の行列式を i 列目に関して展開した式になっている．と言うか，そうなるように余因子行列を作ったわけだ．よって $\tilde{A}A$ の対角成分はすべて $\det A$ が並ぶことになる．次に $i\neq j$ として，$\tilde{A}A$ の (i,j) 成分を計算してみよう．

$$(-1)^{1+i}\det A_{(1,i)}a_{1,j}+(-1)^{i+2}\det A_{(2,i)}a_{2,j}+\cdots+(-1)^{n+i}\det A_{(n,i)}a_{n,j}.$$

当り前だが，(i,i) 成分を計算したときの $a_{k,i}$ の i を一斉に $a_{k,j}$ に取り替えた式になっている．実はこれは，行列 A の第 i 列のところを A の第 j 列で取り替え，他の列は（第 j 列も含めて）何も変えない，という行列 B の行列式を計算したことになっている．実際，小行列式 $A_{(k,i)}$ は A から k 行目と i 列目を取り除いた行列の行列式なので，i 列目をどう変更しようが影響を受けない．よって $A_{(k,i)}=B_{(k,i)}$ となる．一方，B の (k,l) 成分を $b_{k,l}$ と表すことにすると，$b_{k,i}=a_{k,j}$ なので，

$$
\begin{aligned}
\det B &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}\det B_{(k,i)}b_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}\det A_{(k,i)}a_{k,j} \\
&= \tilde{A}A \text{ の第 } (i,j) \text{ 成分}
\end{aligned}
$$

となる．ところが B は第 i 列と第 j 列が同じなので，この二列を取り替えても行列そのものは変化しない．行列式の基本性質 (2) を使うと，$\det B = -\det B$ となることがわかるので，$\det B = 0$ となる．すなわち，余因子行列 $\tilde{A}$ と元の行列 A をかけた行列 $\tilde{A}A$ は対角成分がすべて $\det A$ となり，残りの成分はすべて 0，という行列であることがわかった．すなわち

$$\tilde{A}A = (\det A)\cdot E$$

となる．ここで E は $n \times n$ 単位行列である．これより，

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

という逆行列の公式が得られた．例えば

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

という 2×2 行列を取れば，その余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となるので，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

というお馴染みの公式が復元できる．

5. 応用：ハミルトン・ケイリーの定理

2×2 なら，逆行列の計算は公式で一発だが，3×3 くらいでも既に掃き出し法で逆行列を求めるほうが早いし間違いが少ないような気がする．ましてや，4×4 以上だったら，実際の計算には掃き出し法が安全確実だ．逆行列の公式は，実際の計算というより，理論的な場面で力を発揮する．本稿の最後に，そのような理論的な応用を１つご紹

介することにしよう．

A が $n\times n$ 正方行列であるとし，E は $n\times n$ 単位行列とする．t を変数として，行列式 $\det(tE-A)$ を計算すると，t についての n 次多項式になる．この多項式を A の固有多項式と呼び，$\Phi_A(t)$ と書く．例えば

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \det\begin{pmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{pmatrix} \\ &= (t-a)(t-d)-(-b)(-c) \\ &= t^2-(a+d)t+(ad-bc)\end{aligned}$$

となる．

[ハミルトン・ケイリーの定理] A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ に $t=A$ を代入すると 0 行列になる．より正確に言うと，$\Phi_A(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_{n-1}t+a_n$ ならば，E を $n\times n$ 単位行列として，

$$A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE=0$$

が成り立つ．

例えば A が上記のような 2×2 行列なら $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$ という公式になる．この等式が $n\times n$ 行列に一般化できるというのだ．この定理を，逆行列の公式と言うか，余因子行列を用いて証明してみよう．

$A=(a_{i,j})$ は $n\times n$ 正方行列とし，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ は単位ベクトル，すなわち

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

とする．一般に，A に $\boldsymbol{e}_i$ をかけると，A の第 i 列が出てくることを思い出しておこう．つまり

$$A\boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix}a_{1,i}\\a_{2,i}\\\vdots\\a_{n,i}\end{pmatrix}$$

という等式が成り立つことが，直接計算で確かめられる．E は $n\times n$ 単位行列とすると，

$$A\boldsymbol{e}_i=a_{1,i}E\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_{n,i}E\boldsymbol{e}_n$$

と表すこともできる．この等式を，次のようなブロック行列表示を用いて表すことができる．

$$\begin{pmatrix}A\boldsymbol{e}_1\\A\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\A\boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&&&\\&A&&\\&&\ddots&\\&&&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{1,1}E & a_{2,1}E & \cdots & a_{n,1}E\\a_{1,2}E & a_{2,2}E & \cdots & a_{n,2}E\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1,n}E & a_{2,n}E & \cdots & a_{n,n}E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}.$$

これは，それぞれのブロックが $n\times n$ 行列で，それが $n\times n$ 個並んだ，$n^2\times n^2$ 行列に n^2 次元ベクトルをかけたベクトルどうしの等式である．辺々引き算して，次のような行列と，$\boldsymbol{e}_1$ から $\boldsymbol{e}_n$ まで縦に並べた列ベクトルの積が 0 ベクトルになることがわかる．

$$\begin{pmatrix}A-a_{1,1}E & -a_{2,1}E & \cdots & -a_{n,1}E\\-a_{1,2}E & A-a_{2,2}E & \cdots & -a_{n,2}E\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{1,n}E & -a_{2,n}E & \cdots & A-a_{n,n}E\end{pmatrix}.$$

さて，ここでちょっと想像力を働かせてほしいのだが，この等式の左側の行列を X として，X は実は $n^2\times n^2$ 行列ではなく，$n\times n$ 行列であって，但しその各成分が「$n\times n$ 行列という数」になっているようなものだ，と思っていただきたい．そして，この「$n\times n$ 行列」に対して，その余因子行列 $\tilde{X}$ を左からかけてみよう．すると，これは「$n\times n$ 行列を成分に持つ $n\times n$ 行列 X」の行列式 $\det X$ が対角線上に並び，

$$\begin{pmatrix} \det X & & & \\ & \det X & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

という積が 0 ベクトルになることがわかる．特に，

$$(\det X)\boldsymbol{e}_1 = (\det X)\boldsymbol{e}_2 = \cdots = (\det X)\boldsymbol{e}_n = 0$$

となる．$(\det X)\boldsymbol{e}_i$ は $\det X$ の第 i 列なので，$\det X = 0$ となることがわかる．ところが $\det X$ とは，何を隠そう A の固有多項式に A を代入した行列そのものだ（正確には A の転置行列に A を代入したことになるが，転置しても固有多項式は変わらない）．よってハミルトン・ケイリーの定理が証明された．

慎重な読者は，ブロック行列のブロックをそれぞれ数みたいに扱った扱い方が正当化できるかどうかが不安になると思う．一般にはこんなことはやってはいけないが，もしすべてのブロックの行列が互いに可換なら，数の場合の逆行列公式と全く同様にして，上記の等式も証明できる．この場合は各ブロックが $A - cE$ という形をしているので，これらの行列の積は互いに可換であり，大丈夫なのだ．

ちなみに，ハミルトン・ケイリーの定理を最初に一般に証明したのはフロベニウス．2×2 の場合に証明したケイリーと，四元数の場合に証明したハミルトンに敬意を表して，フロベニウスが「ケイリー・ハミルトンの定理」と名付けたのであった．

たまたまこの原稿を準備していたときに可換環論の講義でハミルトン・ケイリーの一般化である行列式の技法／中山の補題を証明する機会があり，可換環論的証明をご紹介したくなった次第である．

（きむら・しゅんいち，広島大学大学院理学研究科）

代数方程式

代数学の基本定理とは何か

清水　勇二

代数学は，代数方程式の解法とともに発展してきた．2次方程式には**解の公式**がある．3次方程式も2次方程式の解法と3乗根を利用した解の公式があることを聞かれた方もいるであろう．3次でも解の公式を見つけるのは容易ではない．それでは，一般次数の代数方程式にはそもそも解が存在するのだろうか．

x を未知数とするとき，

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad (\#)$$

$(a_n \neq 0)$ を n 次の代数方程式という．係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ はとりあえず実数としておこう．

解の存在ということを問題にしたとき，2次方程式ですら，判別式が負の場合には，解は存在しないと（初めのうちは）習ったはずである．複素数も許すとして2次方程式の解は常に存在すると言えるようになる．そこで改めて問うことにすると，一般次数の代数方程式にはそもそも複素数解が必ず存在するのだろうか．

代数学の基本定理の名をはっきりと聞いた人もいるかも知れないが，より多くの人は複素数解が必ず存在することを暗黙に了解されたことがあるだろう．

さらに振り返ってみると，中高で学ぶ2次方程式や若干の高次方程式の解法では，実数係数の方程式のみ，実数解のみにまず焦点が当てられている．複素数まで視野を広げた時点でも，おおかた実数係数の代数方程式のみを考察していただろう．

この小文で解説する代数学の基本定理は，複素数解が必ず存在することを保証する．そしてそれは次の形をとる．

定理　複素数係数の代数方程式は，複素数の解を必ず有する．

ここで複素数係数の代数方程式とは，上の $(\#)$ において係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ が複素数である方程式である．

これを最初に証明したのはGaussではないようである．Gaussは1799年に彼の最初の証明を与えたが，位相的な問題の側面が現れて明快とは言い難いようである．Gaussが与えた4つの証明のうち，第2のものは後で説明する代数的な証明とほぼ同等である．後で触れるArgandの証明は1814年に発表されているもので，かなり初等的に見える．代数学の基本定理の歴史については文献1)の第4章が詳しい．

代数学の基本定理の意義について触れておこう．それは解の存在に関する命題であって，それまでの係数を使った解の公式の探求とは異なる考え方である．常微分方程式の解の存在定理，線形空間の基底の存在定理，代数閉拡大の存在定理など，存在を保証する定理のさきがけとなっていると思われる．

また，代数学の基本定理は解を複素数の範囲で

探すから成立するのであって，実数の範囲では成立しない．すなわち，**複素数**の特殊性を浮き彫りにするのが代数学の基本定理である．

ここの内容としては，まずは複素数の復習をして，それから代数学の基本定理のいくつかの証明を解説しよう．最後に，代数学の基本定理の延長線上にある多項式の因数分解，Riemann 球面間の写像，多項式の零点集合というテーマについて，少しだけ垣間見てみよう．

解の公式はそれ自体興味深いテーマである．3 次，4 次方程式には根号を使う解の公式があり，一般にはガロア理論を通じてべき根による解法の有無が判定できる．また，その発見の歴史にもドラマがある．これらについては，小林正典氏，三宅克哉氏の解説に委ねる．

1. 複素数

$\zeta^2=-1$ となる数 ζ を**虚数単位**と言い，通常 i と記す．i は imaginary（想像上の）の i である．虚数単位は 2 次方程式

$$x^2+1=0$$

の解であるので，実は虚数単位は 2 つある．この事情は複素平面の向き付けに関連するが，脇道にそれるので今はこれ以上触れないでおく．

複素数とは，実数と虚数単位 i を組み合わせた

$$\alpha=a+bi=a+ib \quad (a,b\in\mathbb{R})$$

という形の数である．$\mathbb{R}$ は実数の全体のなす集合の記号である．複素数 $\alpha=a+bi$ に対して a を実部 (real part), b を虚部 (imaginary part) と呼び，それぞれ Re α, Im α と記す．複素数 $\overline{\alpha}=a-bi$ を α に共役な複素数と言う．

複素数の全体のなす集合は $\mathbb{C}$ で表す．複素数を虚数とも言うが，実数と虚数，あるいは real number と complex number という名称は，複素数が受け入れられまでの心理的抵抗を表していると言えよう．

複素数の幾何学的表示，すなわち**複素平面**は，複素数が実在することの受容に大きく関わっている．

複素数の全体 $\mathbb{C}$ は，$\{1,i\}$ を基底とする 2 次元の実ベクトル空間であり，対応

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R},$$
$$\alpha=a+bi \longleftrightarrow (a,b)$$

でもって $\mathbb{C}$ を平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視する．複素数の和はベクトルの和と本質的に同じである．

$$(a+bi)+(a'+b'i) \longleftrightarrow (a,b)+(a',b')$$
$$=(a+a')+(b+b')i \longleftrightarrow =(a+a',b+b')$$

複素数の積は

$$\alpha\beta=(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$$

という具合だが，これは複素数の極表示から理解するのがよい．ベクトルの長さに対応する $\sqrt{a^2+b^2}$ $(\geqq 0)$ を複素数の**絶対値**と呼び，$|\alpha|$ と記す．また，線分 0α が実軸となす角を**偏角**と呼び，$\arg\alpha$ と表す（偏角は 2π の整数倍の不定性がある）．

$r=|\alpha|$, $\arg\alpha=\theta$ とすると，

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

となる．$\beta=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ とすると，α と β の積は，加法定理を利用して

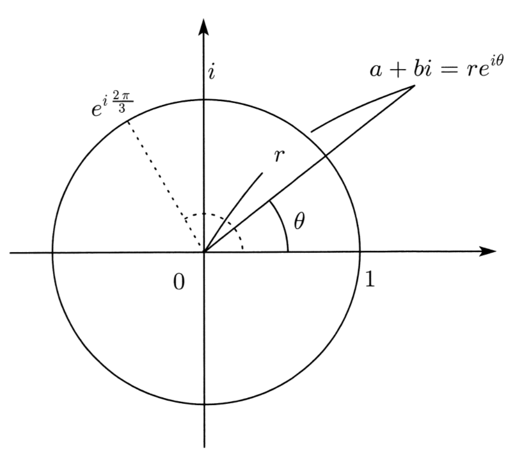


図 1　複素数の極表示と例 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\alpha\beta = rr'\{\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\}$$

となる．こうして複素数の積は，原点からの距離どうしの積と偏角どうしの和の組合せとして理解できる．共役な複素数どうし α と $\overline{\alpha}$ は実軸に関して対称な位置にある．オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を使えば，

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$$

と書ける．これを複素数の**極表示**とも言う（図 1 参照）．$e^{i\pi} = -1$ という式の魅力はいろいろなところで語られている．

複素数の幾何学的意味については，さらに無限遠点を付け加えた Riemann 球面として後で議論する．

2. 代数学の基本定理と代数的証明

表題の定理を再度述べておこう．

定理　複素数係数の代数方程式は，複素数の解を必ず有する．

さて $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_i \in \mathbb{C})$ を複素数係数の多項式とするとき，

$$\overline{P}(x) = \overline{a_n}x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}x + \overline{a_0}$$

とおいて，$f(x) = P(x)\overline{P}(x)$ を考える．すると

$$\begin{aligned}\overline{f(x)} &= \overline{P(x)\overline{P}(x)} = \overline{P(x)}\,\overline{\overline{P}(x)} \\ &= \overline{P(x)}P(x) = f(x)\end{aligned}$$

である．すなわち，$f(x)$ の係数は実数である．

これは実数係数の代数方程式の複素数解が必ず存在すれば，上記の代数学の基本定理も証明できることを意味する．

実係数多項式 $P(x) = 0$ の解が実解でない場合，その複素数解 α に共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解である．$P(x)$ が n 次式ならば，解は実数解 $a_1, \ldots, a_r$ と複素数解 $\alpha_1, \overline{\alpha}_1, \ldots, \alpha_s, \overline{\alpha}_s$ $(r + 2s = n)$ というパターンとなる．

$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2(\mathrm{Re}\,\alpha)x + |\alpha|^2$ は実係数の 2 次式であるから，$P(x)$ の因数分解を実数係数の範囲内で行うと，既約な因子には実係数の 1 次式 r コと 2 次式 s コのみが現れる．

これを用いて，実数係数の有理式は必ず部分分数展開がされる．そして，それは有理式関数の積分を計算する上で利用できる．

Argand の証明

$P(x) = 0$ の解の存在をいうには，絶対値をつけた方程式 $|P(x)| = 0$ の解の存在を言えばよい．これは次の 2 つの補題から従う．

補題 1　複素数係数多項式 $P(x)$ が定数でなく，$z_0 \in \mathbb{C}$ が $|P(z_0)| \neq 0$ ならば，$|P(z_0)|$ は関数 $|P(x)|$ の最小値ではない．

補題 2　複素数係数多項式 $P(x)$ に対し，関数 $|P(z)|$ $(z \in \mathbb{C})$ には最小値が存在する．

補題 2 は $|x| \to \infty$ のとき $|P(x)| \to \infty$ であることと，コンパクトな集合 $|x| \leqq r$ 上で連続関数 $|P(x)|$ は最小値をとることから直ちに従う．補題 1 のほうは，$z_1 \in \mathbb{C}$ が存在して

$$|P(z_1)| < |P(z_0)|$$

なることを意味するが，これは Argand の不等式と呼ばれる．これは次のように初等的に示せる．

$P(x + z_0)$ に置き換えることにより $P(0) \neq 0$ としてよい．そして $P(x)$ が冒頭の (#) という形のとき，$|a_0| = |P(0)| \neq 0$ ゆえ $P(x)$ を $1/a_0$ 倍して $P(0) = 1$ としてよい．すると

$$P(x) = 1 + bx^k + x^{k+1}Q(x) \quad (b \neq 0)$$

という形になる．複素数の極表示を利用して $-1/b$ の k 乗根 c を一つ選ぶ．$P(cx)$ を改めて $P(x)$ とすることにより $P(x) = 1 - x^k + x^{k+1}Q(x)$ と仮定してよい．このとき，ある十分小さな実数 x_1 について $|P(x_1)| < 1 - x_1^k(1 - x_1|Q(x_1)|) < 1$ を示すことができる．興味のある方は試してみられるとよい．

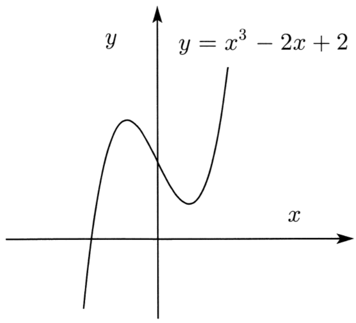


図2　3次関数のグラフ．

Jean Robert Argand はスイスの簿記係で，数学のアマチュアだったという．ノルウェーの Casper Wessel と独立に複素数の幾何学的解釈を与えていることでも知られている[1]．

代数的な証明

ここで言う純代数的な証明とは，いわゆる体論の基本を使う証明である．代数方程式の最小分解体の存在を利用して議論をするが，詳しくは，三宅克哉氏の解説を参照されたい．

前の節で見た通り，$P(x)$ が実数係数の多項式の場合に証明すればよい．次の事実は良く知られている（図2参照）．

補題 3　実数係数の多項式 $P(x)$ が奇数次ならば，代数方程式 $P(x) = 0$ は，実数解を必ず有する．

実際，$P(x)$ の最高次の係数が正ならば，$x \to +\infty$ のとき $P(x) \to +\infty$ であり，$x \to -\infty$ のとき $P(x) \to -\infty$ となる．

$P(x)$ を実数値関数と見るとき，$P(x)$ は連続関数であるから，**中間値の定理**により，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ について $P(\alpha) = 0$ となる（補題3の証明終わり）．

ガロア理論によれば，この補題から奇数次の $\mathbb{R}$ の拡大が存在しないことが従う．すると残りは2のべきの $\mathbb{C}$ の拡大が $\mathbb{C}$ 以外に存在しないことを示せばよい．それは，やはりガロア理論と，複素数の平方根が $\mathbb{C}$ において必ず存在するという事実から従う．代数学の教科書，例えば文献2) の 3.1 を参照されたい．

上の代数的証明では中間値の定理を利用した．その中間値の定理は実数の連続性に基づく定理であり，この証明を純代数的とは言えない．次節で解析的な手法に基づく超越的な証明を紹介しよう．

3. 超越的な証明

1変数の複素関数論の標準的事実を使うと，代数学の基本定理をかなり容易に証明することができる．この証明をご存知の方も多いだろう．

関数論を使う証明

$P(z)$ を定数でない複素数係数多項式として，これを複素変数 $z \in \mathbb{C}$ の複素関数と見る．

方程式 $P(z) = 0$ が解をもたないとすると，関数 $1/P(z)$ は全複素平面で正則となる．$z \to \infty$ のとき，$P(z) \to \infty$ となるから，$1/P(z) \to 0$ である．従って，$1/P(z)$ は $|z|$ が十分大きなところで有界であり，全複素平面で有界となる．

全複素平面で正則でかつ有界な関数は定数のみである，という事実（Liouville の定理）により $1/P(z)$ は定数であることになるが，$P(z)$ が1次以上の多項式という仮定に反する．

従って，方程式 $P(z) = 0$ は解を少なくとも1つは持つことが結論される（証明終わり）．

非常に短く見通しの良い証明である．しかし，Liouville の定理の証明には複素関数の定義から始まり，Cauchy の積分公式にたどり着くまでの知識が必要である．複素数および複素関数の基本性質に多く依存していると言えよう．

もう一つ補足すると，$z \to \infty$ の極限の考察は，$\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えた **Riemann 球面** $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ により言い換えられる．$z \to \infty$ のとき，$P(z) \to \infty$ となることは，

$$\widetilde{P}(z) = P(z) \quad (z \neq \infty), \quad \widetilde{P}(\infty) = \infty \quad (*)$$

と定めた写像 $\widetilde{P} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が well-defined である（定義に欠陥がない）ことを意味する．この見方では，代数学の基本定理は $0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} (\subset S^2)$ の逆像が空集合でないこ

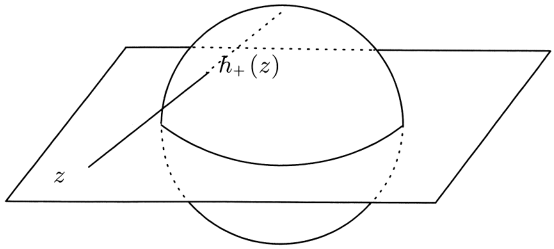


図 3　球面からの立体射影.

とを意味する.

次の話に関連することだが, $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を球面と呼ぶわけは, 次の立体射影 (図 3) により $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ が 2 次元球面 S^2 と同一視できることに由来する.

$$
\begin{aligned}
h_+ : \mathbb{C}\cup\{\infty\} &\to S^2(\subset \mathbb{R}^3)\\
z = x+iy &\mapsto h_+(z)\\
\infty &\mapsto (0,0,1)
\end{aligned}
$$

$$
h_+(z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)
$$

正則値定理を使う位相的証明

次に多様体に関する基本的な事実を利用する証明を紹介しよう. そのためにまず正則値定理のあらましを述べる.

$f : M \to N$ を C^∞ 級の多様体間の C^∞ 級写像とする. 'C^∞ 級' の代わりに '滑らかな' と言うこともある. C^∞ 級**多様体** M とは, Euclid 空間 $\mathbb{R}^m$ の開集合を C^∞ 級の同型写像で貼り合わせたものとだけ言っておこう (文献 3) を参照されたい). m を多様体 M の次元と言い $\dim M$ と記す.

点 $x \in M$ での接ベクトルの全体は接空間 T_xM をなす. $m = \dim M$ ならば, T_xM は m 次元の実線形空間である. そして C^∞ 級写像 f に対して, 接空間の間の線形写像

$$
df_x : T_xM \to T_{f(x)}N
$$

が対応する (誘導される).

点 $y \in N$ に対して, どの逆像の点 $x \in f^{-1}(y) = \{x \in M \mid f(x) = y\}$ についても線形写像 df_x が

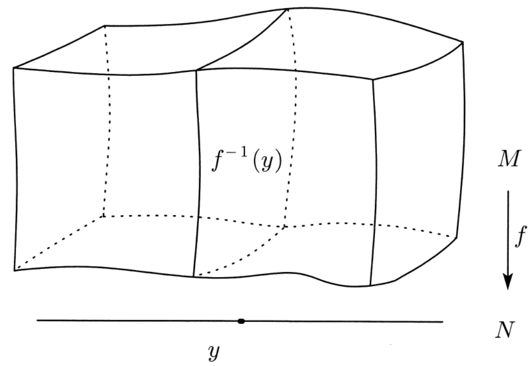


図 4　正則値とその逆像.

全射であるとき, y を**正則値**と言う. また df_x が全射でない x を臨界点と言い, $f(x)$ を臨界値と言う.

正則値定理　点 y が C^∞ 級写像 $f : M \to N$ の正則値ならば, 逆像 $f^{-1}(y)$ は $\dim M - \dim N$ 次元の多様体である.

さらに「臨界値の全体は N の中でルベーグ測度 0 である」という Sard の定理がある. C^∞ 級写像のおおよその構造は正則値定理により理解できることを意味している (図 4 参照).

さて, 代数学の基本定理を Milnor[4)] に従い証明する. 定数でない複素数係数多項式 $P(z)$ を $(*)$ と同じやり方で写像

$$
\widetilde{P} : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}
$$

と考える. 立体射影による同一視を通じて, この写像を球面 S^2 からそれ自身への写像と見たとき, $\widetilde{P} : S^2 \to S^2$ は C^∞ 級写像である. それは北極点 $(0,0,1)$ 以外では明らかであり, 北極点については直接的な計算で $\widetilde{P}(w) = 1/\overline{P}(1/w)$ となることがわかる. ここで, $S^2 - \{(0,0,-1)\}$ を同様の立体射影で $\mathbb{C}$ と同一視したときの $\mathbb{C}$ の座標を w とした.

$\widetilde{P}$ の臨界点は導関数 $P'(z)$ の零点であるから, 有限個しかない. ゆえに臨界値は有限個であり, 正則値の集合 U は S^2 の連結な開集合である.

写像 $\widetilde{P}$ の定義域と値域は同じ 2 次元球面なので, 正則値定理により正則値 $y \in U$ の逆像 $\widetilde{P}^{-1}(y)$

は 0 次元の多様体なので，1 点ごとに孤立した離散的な集合である．

ところで $\mathbb{R}^3$ の部分集合として有界閉集合である S^2 はコンパクトである．ゆえに $\widetilde{P}^{-1}(y)$ $(\subset S^2)$ もコンパクトである．離散的なコンパクト集合は有限集合なので，逆像 $\widetilde{P}^{-1}(y)$ は有限集合である．すると元の個数 $\#\widetilde{P}^{-1}(y)$ を考えられるが，その個数は y によらずに局所的に定数であることが示せる．U が連結だったので，U 上で同じ整数値 c を取り続ける．逆像が空集合でない点は存在するので，$c \neq 0$ である．臨界値の逆像は空集合でないので，写像 $\widetilde{P}$ は全射であることが分かった．

特に，$0 \in \mathbb{C} \cup \{0\} \simeq S^2$ の逆像も空集合でない．従って，代数学の基本定理が示せた．

上の証明では，写像 $\widetilde{P}$ の全射性を示したので，次の系が得られた．

系　任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して，方程式 $P(z) = c$ は解をもつ．

方程式 $P(z) - c = 0$ を考えれば，代数学の基本定理からこの方程式の解の存在が言えるので，写像 $\widetilde{P}$ の全射性は代数学の基本定理の別の証明から従うとも言える．

4. 代数学の基本定理を超えて

議論してきた中から，多項式の因数分解，多項式の零点集合というテーマについて，さらに取り上げてみる．

整関数の因数分解

複素数係数多項式を複素関数と考えると，全平面で正則である．このように全平面で正則な関数を**整関数**（entire function）という．

代数学の基本定理から複素数係数多項式が 1 次式の積に因数分解することが示せたように，整関数も零点ごとの因子の積に表示できる．一例として正弦関数 $\sin z$ を考えよう．複素変数 z の関数として $\sin z$ は

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

と定める，あるいは Taylor 展開のべき級数で定める．いずれにせよ全複素平面で正則な関数である．その零点は $n\pi$（n は整数を動く）という形である．$\sin z$ の因数分解として

$$\sin z = z \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/n\pi}$$

と表示できる．$e^{z/n\pi}$ という因子は，無限積が絶対収束するために必要である．$\pm n$ の項をまとめて

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

と表示することもある．

一般の整関数も，有限個の零点を持つ場合はもちろん，無限個の零点 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持つ場合も適当な $m, h, g(z)$ について

$$z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h}$$

という積に表示できる．

多項式の零点集合

2 変数の多項式 $P(x, y)$ の零点集合

$$V(P) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}$$

を 1 変数のときと同様に考えたい．1 変数多項式の零点の場合は有限集合であった．2 変数の場合は一般には無限集合となる．例えば，$Q(x)$ を 1 変数多項式として $P(x, y) = Q(x) + y^2$ の場合を考える．$z \in \mathbb{C}$ に対して，$V(P) \ni (z, w)$ について $w^2 = -Q(z)$ であるから，$Q(z) = 0$ の場合は $w = 0$ の 1 点，$Q(z) \neq 0$ の場合は $w = \pm\sqrt{-Q(z)}$ の 2 点が見つかる．従って，$V(P)$ は無限集合である．それだけでなくこの考察では，$V(P)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 対 1 の**分岐**する**被覆**空間

$$f : V(P) \to \mathbb{C}\ ;\ (z, w) \mapsto z$$

と見ている．「分岐する」というのは z を固定したときの $P(z, w) = 0$ を満たす (z, w) の組が 1 つになる有限個の例外的状況を指している．

より一般に $P(x,y)$ が y について n 次式であれば，同様に定義した $f: V(P) \to \mathbb{C}$ は n 対 1 の分岐被覆となる．

$P(z,w) = z - Q(w)$ という多項式の場合に同様に定義した $f: V(P) \to \mathbb{C}$ を考えると，多項式 $Q(w)$ から出発して定めた Riemann 球面間の写像 $\widetilde{Q}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を $\mathbb{C}$ に制限したものとなる．

Riemann 球面を考えたように，上記の分岐被覆に無限遠点を考えることもできるのだが，$\mathbb{C}^2$ の無限遠点の加え方が一意的ではないのでその部分集合として定義した $V(P)$ の無限遠点の様子は少々複雑であり，ここでは触れない．

この題材をより精緻に扱うと，Riemann 面と被覆空間，代数曲線とその間の正則写像などといった話題となる．さらに，一般の多変数の多項式で考えると $V(P)$ は一般次元の代数多様体となる．これについては，代数幾何学の教科書，例えば文献 5) を参照されたい．

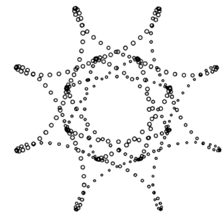
代数学の基本定理の証明に，代数・解析・位相・幾何の側面が詰まっていることは理解していただけたと思う．その延長線上に広がる豊かな世界を垣間見ることができたであろうか．

参考文献

1) H.-D. エビングハウス他著,『数』上，下，シュプリンガー数学リーディングス，シュプリンガー・ジャパン (1991).
2) 桂　利行著,『代数学 III　体とガロア理論』, 東京大学出版会 (2005).
3) 坪井　俊著,『幾何学 I　多様体入門』, 東京大学出版会 (2005).
4) J. ミルナー著，蟹江幸博訳,『微分トポロジー講義』, シュプリンガー・ジャパン (1998).
5) 上野健爾著,『代数幾何』, 岩波書店 (2005).

（しみず・ゆうじ，国際基督教大学教養学部）

解ける代数方程式



小林 正典

1. はじめに

未知数を x とおくと，x は方程式 $f(x)=0$ を満たす．x を求めよ．

x などという得体がしれないものが登場して，与えられた条件を満たすように，x を決めなさいという．解が存在しなかったらすべてがなかったことになる不安の中で，計算を続けてうまく解が求まったとする．その解が確かに実数なり複素数なり希望の範囲に存在して実際に条件を満たすことを確かめて，ほっと一安心する．方程式とはかように恐ろしいものである．

本稿では，代数方程式の素朴な代数的解法について述べる．

2. 平方根で解ける方程式

2.1 2 次方程式の復習

2 次方程式の解の公式は古代バビロニアですでに知られていた．ご存じの通り，x についての 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられる．これを 2 次方程式の**解の公式**と言い，$D:=b^2-4ac$ を**判別式**と呼ぶ．a,b,c が実数のとき，$D>0$, $D=0$, $D<0$ に応じて，異なる 2 実数解，実数の重解，異なる 2 虚数解をもつ．2 解を α,β とおくと，**解と係数の関係**

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

が成り立つ．

2.2 複 2 次式

ax^4+bx^2+c（$a\neq 0$）の形の式は x^2 の 2 次式なので**複 2 次式**と呼ばれる．2 次方程式の応用として，簡単に解くことができる．便宜上次の形に変形しておく．

例題．任意の実数 p,q に対し，

$$f(x)=x^4-2px^2+q$$

は実数係数の 2 次式の積に因数分解できることを示し，$f(x)=0$ の解を求めよ（ヒント：p^2-q の符号で場合分けする）．

解答．$p^2>q$ のとき，x^2 に関する 2 次方程式と見ると，解の公式より

$$(x^2-p-\sqrt{p^2-q})(x^2-p+\sqrt{p^2-q})$$

と因数分解される．$p^2>q$ から $p\pm\sqrt{p^2-q}$ は実数であり，解は $x=\pm\sqrt{p+\sqrt{p^2-q}}$, $\pm\sqrt{p-\sqrt{p^2-q}}$ となる．外側の根号内の符号により，元の方程式は 4 つの実数解をもつか，実数解と虚数解を 2 つずつもつか，4 つの虚数解をもつ．

$p^2=q$ のときは $(x^2-p)^2$ となり，$x=\pm\sqrt{p}$ が重解（$p>0$ のとき実数，$p<0$ のとき共役な

虚数．$p=0$ のときは 0 の 4 重解）になる．

$p^2 < q$ のとき，特に $q > 0$ であるから正の平方根 $\sqrt{q}$ が存在し，$\pm p < \sqrt{q}$ を満たす．$x^4-2px^2+q=(x^2+\sqrt{q})^2-2(p+\sqrt{q})x^2$ である．$p+\sqrt{q}>0$ であるから，$r:=\sqrt{2p+2\sqrt{q}}>0$ が存在し，$(x^2+rx+\sqrt{q})(x^2-rx+\sqrt{q})$ と因数分解される．2 次式の判別式は，$r^2-4\sqrt{q}=2(p-\sqrt{q})<0$．よって根は相異なる 2 組の共役な虚数 $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{2p+2\sqrt{q}}\pm i\sqrt{-2p+2\sqrt{q}})$（複号任意）からなる．

> **問題．** 次の方程式を解け．(1) $x^4-10x^2+1=0$．(2) $x^4-4x^2+2=0$．(3) $x^4+x^2+1=0$．

一般に，定規とコンパスによる作図問題は，開平と加減乗除だけで解ける実数係数方程式の問題に帰着されることが知られている．

■ 3．方程式の一般論 ■

0 でない多項式 $f(x)$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の解を $f(x)$ の**根**とも言う．

3.1 許される操作について

方程式を解く操作について反省を加えてから先に進もう．方程式の係数は，与えられているから使ってよいことにする．多項式の方程式であるので，多項式を作るときに使う足し算・引き算・掛け算も使ってよいことにする．

しかし，割り算については，多項式を作るのに使う必要がない．「覆水盆に返らず」という言葉がある．いわゆる「取り返しがつかない」ことである．いくつかの作業を行って，後から「待った」をかけてなかったことにしようとしても，普通できない．1 次方程式ですら，x に a を掛けたら b になったとして，b から x に戻せと言われても，たまたま $a=0$ だったりするとどうにもならない．多変数にして，A が行列で $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}$ がベクトルのとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつ条件は，もはや A だけの条件では述べられない（ベクトルは数じゃないと思う人もいるかもしれないが，例えば複素数は 2 次元の実ベクトルともみなせることを思い出してほしい）．そこで，最初から，方程式の最高次の係数は 1 である（**モニック**であると言う）とする．

a を掛けることを n 回繰り返すと a^n を掛けることになる．$b=a^n$ として，逆に b から a を求めることが，n 乗根を与えることである．つまり，冪根をとることは，掛け算の繰返しの逆である．冪根を取る操作を許さないとすると，$x^3-2=0$（倍積問題）の解すら表せるかどうか怪しい．

すると足し算の場合でも，a を足すことを n 回繰り返すと na を足すことになる．では逆に，ある足し算を n 回繰り返したら $b=na$ を足すことになったとき，1 回当たりいくつ足したかというと，$\frac{b}{n}=a$ である．この意味で，正整数で割ることは，足し算の繰返しの逆である．負整数による割り算は，さらに -1 を掛ければよい．

そこで，ここでは，方程式の解の公式で係数による割り算を使うことには慎重になり，足し算・引き算・掛け算以外には，0 でない整数による割り算・冪根を取る操作だけで書けることを確認しながら進む．これらは一種の「操作の等分」である．

ただし，割り算と異なり，冪根は 1 個に定まらない．$\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ はいずれも 2 乗して 2 になる．一般に，$\zeta_n := \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ として，$1,\zeta_n,\zeta_n^2,\ldots,\zeta_n^{n-1}$ の n 個の複素数は 1 の n 乗根である．$\sqrt[n]{a}$ の 1 つを α とすると，$\zeta_n^k\alpha$ $(0\le k<n)$ も a の n 乗根である．

3.2 基本的な定理

以下，R を可換環として述べるが，$\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ として読んでも差し支えない．

> **定理 1**（因数定理） α を R の元とする．R 係数多項式 $f(x)$ に対し，
>
> $$f(\alpha)=0 \iff (x-\alpha)\,|\,f(x).$$
>
> ただし，記号 $|$ は左が右を割り切ることを示す．

証明 $f(x)$ を次数の高いほうから $x-\alpha$ で割り算することにより，$f(x)=(x-\alpha)q(x)+r$ と変形できる．ただし，$q(x)$ は R 係数多項式であり，r は R の元．x に α を代入すると，$f(\alpha)=r$．

特に $f(\alpha)=0$ と $r=0$ は同値. □

よって, 解 α が 1 つ求まれば, $f(x)$ を $x-\alpha$ で割り算して, 次数が 1 つ下がった多項式 $q(x)$ の根を探せばよい. 特に次が言えた.

定理 2 (可換環係数のモニックな) n 次方程式の解は高々 n 個である.

α が R に入るとは限らない場合も同様の結果がある. α があるモニックな R 係数多項式の根になるとする. すると, α を根とするモニックな R 係数多項式のうちで, 次数が最小のもの $m(x)$ が存在する. $m(x)$ を α の R 上の**最小多項式**と言う. 例えば, 虚数単位 i の $\boldsymbol{R}$ 上の最小多項式は x^2+1 である. R の元 α の R 上の最小多項式は因数定理より $x-\alpha$ である.

定理 3 α の R 上の最小多項式を $m(x)$ とすると, R 係数多項式 $f(x)$ に対し,

$$f(\alpha)=0 \iff m(x) \mid f(x).$$

証明 $f(x)$ を $m(x)$ で割り算すると, 余りは $m(x)$ より次数が低い. $x=\alpha$ を代入すればよい. □

特に, 最小多項式は一意的に定まる.

a, b を実数とするとき, 複素数 $z=a+ib$ に対し $a-ib$ を**共役複素数**と言い, $\overline{z}$ で表す. $\overline{z}=z \iff z$ は実数, $\overline{\overline{z}}=z$, $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{z}z=|z|^2 \geq 0$ が成り立つ. $b \neq 0$ のとき $a+ib$ と $a-ib$ の $\boldsymbol{R}$ 上の最小多項式は共に $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ である.

定理 4 複素数 α が実数係数多項式の根ならば $\overline{\alpha}$ も根である.

証明 $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ を実数として

$$\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$$

を満たすとする. 両辺の共役複素数を取ればよい(次の定理からも従う). □

一般に, α, β は同じ R 上の最小多項式 $m(x)$ をもつとき, R 上**共役**であると言う.

定理 5 α と β が R 上共役で, α が R 係数多項式 $f(x)$ の根ならば, $f(\beta)=0$ である.

証明 $m(x) \mid f(x)$ であるから. □

定理 6 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次方程式は, 複素数の範囲に必ず解をもつ.

これについては本特集の記事を参照のこと.

1 つの解を α とすると, 因数定理より $x-\alpha$ で割り切れるので, 次数が 1 つ下がった方程式が得られる. 帰納的に, 解は重複度を込めてちょうど n 個存在することが従う.

定理 7 (解と係数の関係) n 次方程式

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とするとき,

$$\begin{cases} \alpha_1+\cdots+\alpha_n=-a_{n-1}, \\ \sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j=a_{n-2}, \\ \vdots \\ \alpha_1\cdots\alpha_n=(-1)^n a_0. \end{cases}$$

証明 因数定理により方程式の左辺は $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ と因数分解される. 両辺の係数を比較すればよい. □

定理 8 整数係数の方程式 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ に有理数解が存在すれば, 定数項 a_0 の正負の約数 (特に整数) である.

証明 有理数解 $x=\frac{b}{a}$ (a, b は互いに素な整数, $a>0$) があるとする. 代入して分母を払うと, $b^n+a_{n-1}b^{n-1}a+\cdots+a_0a^n=0$. 整理して, $b^n=-a(a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_0a^{n-1})=0$. 右辺は a の倍数であるから, 左辺もそうであるが, a と b は互いに素であるから, $a=1$ でなければならない. よって $b(b^{n-1}+a_{n-1}b^{n-2}+\cdots+a_1)=-a_0$. 左辺は b の倍数であるから, a_0 は b の倍数である. □

一般に, R が UFD (素因数分解が一意的にできる整域) のとき, モニックとは限らなくても, R

係数の方程式が商体に解をもつなら，その分母は最高次の係数の約数，分子は定数項の約数として表されることが同様にして示される．

■ 4. 判別式 ■

2 次方程式が重解を持つことは判別式が 0 であるかどうかで判定できた．実際，$x^2+px+q=0$ の 2 解を α,β とすると，$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2-4q=D$ である．

3 次方程式の解を α,β,γ とするとき，解の**差積**

$$\varDelta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

の 2 乗 $D=\varDelta^2$ を判別式と呼ぶ．高次方程式でも同様に，差積の 2 乗として判別式を定義する．$D=0$ ならば少なくとも 2 つの解が一致する．なお，解に一斉に定数を加えても，解どうしの差は変わらないから，差積も判別式も変わらない．

> **問題** (4) 実数係数 3 次方程式 $f(x)=0$ の解に対し次が成り立つことを示せ．
> $D>0 \iff$ 相異なる 3 実解をもつ．
> $D=0 \iff$ 重解をもつ（解はすべて実数）．
> $D<0 \iff$ 実解と，共役な虚数解をもつ．

一般に，実数係数の方程式で，すべて実数解ならば差積は実数なので，D は正になる．虚数解が 1 組増えると，共役複素数の差が純虚数になるため（他は実数になる）D の符号が交代する．つまり，解が相異なるという前提の下で，$D>0$ は虚数解の共役な組が偶数個であることと同値である．

例えば 4 次方程式の場合，解が相異なるとき，4 虚数解 $\bar{\alpha}=\beta$, $\bar{\gamma}=\delta$ の場合：$\varDelta=(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)\times$（共役複素数の積）$<0$．よって $D>0$．2 虚数解 $\bar{\alpha}=\beta$, $\gamma<\delta\in\boldsymbol{R}$ の場合：$\varDelta=(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)\times$（正数の積）は純虚数．よって $D<0$．すべて実数解のとき $\varDelta\in\boldsymbol{R}$ より $D>0$．

判別式は解の対称式であり，終結式 $R(f,f')$ という行列式を用いて表せ，係数の整数係数多項式になることが知られている．

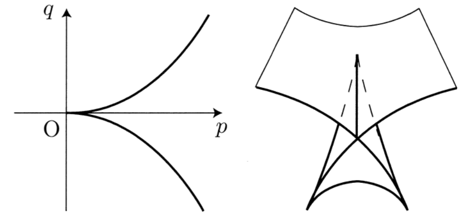


図 1　判別式の零点集合（実係数）．

重解かどうか判定するだけなら 2 乗しないで差積でもよさそうなものである．だが，差積は解の交代式，すなわち 2 つの解を入れ替えると -1 倍される式なので，一般に，符号が解の並べ方に依存してしまい，また，係数の多項式で表せない．

> **問題** (5) $x^3-3px-2q=0$ の判別式は $D=108(p^3-q^2)$ であることを確かめよ．

pq 平面内で $D=0$ は尖点 3 次曲線と呼ばれる曲線を定める（図 1 左）．4 次方程式 $x^4+px^2+qx+r=0$ の判別式は $D=-4p^3q^2-27q^4+16p^4r-128p^2r^2+144pq^2r+256r^3$ であり，$D=0$ で定まる図形は「ツバメの尾」という特異点をもつ曲面になる（図 1 右）．

■ 5. 高次方程式の解法 ■

5.1 3 次方程式の解法

まず 2 次方程式の平方完成の類似を行う．複素数係数の 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は，$y=x+\frac{a}{3}$ とおくと 2 次の項のない方程式に帰着される（$y^3=x^3+ax^2+\cdots$ による）．y から x は $x=y-\frac{a}{3}$ により求まる．このように，一般に $x^n+ax^{n-1}+\cdots$ の形の複素数係数の多項式では，$y=x+\frac{a}{n}$ とおいて最高次の次の係数を消すことができる．これを**カルダノ変換**と言う．

そこで，最初から

$$x^3-3px-2q=0$$

の形の方程式を考える．係数を 3 や 2 で割ったものを p や q としているのは，あとの都合である．16 世紀にデル＝フェッロ，タルタリアが発見した処方箋に従う．$x=u+v$ とおいてみると，

$$(u+v)^3-3p(u+v)-2q=0.$$

$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$ だから

$$(u^3+v^3-2q)+3(uv-p)(u+v)=0.$$

よって，もし $p=uv$, $2q=u^3+v^3$ となる u,v を求めることができれば，$x=u+v$ を得る．解と係数の関係より，u^3,v^3 は次の y に関する 2 次方程式の 2 解である．

$$y^2-2qy+p^3=0.$$

解の公式より $y=q\pm\sqrt{q^2-p^3}$．これより $u=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}$, $v=\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$ とおく．ただし 3 乗根の偏角は $uv=p$ となるように選ぶ．u の偏角を決めれば v の偏角が決まるので，u の 3 つの解に応じて $x=u+v$ が定まる．

以下，p,q が実数のとき解を吟味する．p,q が $q^2-p^3>0$ を満たすとき（つまり $D<0$ のとき），3 重根号の中身は実数だから，u として実数が取れる．このとき $uv=p$ が実数だから v も実数である．また $u\neq v$ である．$\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$ として，解は $u+v$, $u\omega+v\omega^2$, $u\omega^2+v\omega$ であり，1 個の実数解と 2 個の共役な虚数解をもつ．

逆に $q^2-p^3<0$ のとき，3 重根号の中身（つまり u^3 と v^3）は共役複素数である．3 重根号の積は $uv=p$ より実数なので，u と v は常に共役である．したがって和 $u+v$ は実数（u,v の実部の 2 倍）であるから 3 つの解はすべて実数である．

例題． 方程式 $x^3+6x-20=0$ を解け．
解答． 定理 8 を用いても解けるが，解の公式を使ってみる．$p=-2$, $q=10$ より $q\pm\sqrt{q^2-p^3}=10\pm\sqrt{108}=10\pm6\sqrt{3}$．これは実数だから，その 3 乗根として実数が取れる．$(1\pm\sqrt{3})^3=10\pm6\sqrt{3}$ に気付けば，解は，$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$, $(1+\sqrt{3})\omega+(1-\sqrt{3})\omega^2=-1+3i$, $(1+\sqrt{3})\omega^2+(1-\sqrt{3})\omega=-1-3i$.

5.2 4 次方程式のフェラーリの解法

4 次方程式の解法に移ろう．カルダノ変換により x^3 の係数は 0 とできるので，$x^4+px^2+qx+r=0$ を解く．

フェラーリの解法では，左辺を 2 つの平方式の差 A^2-B^2 の形に表し，$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ を用いて因数分解に持ち込む．未知の定数 λ を用いて方程式を次のように変形する．

$$x^4+2\lambda x^2+\lambda^2=(2\lambda-p)x^2-qx+(\lambda^2-r)$$

左辺は $(x^2+\lambda)^2$ に等しい．右辺が平方完成できるための必要十分条件は，判別式 $=0$ より

$$q^2-4(2\lambda-p)(\lambda^2-r)=0$$

である．整理すると，

$$\lambda^3-\frac{p}{2}\lambda^2-r\lambda+\frac{4pr-q^2}{8}=0$$

これは λ に関する 3 次方程式（**3 次分解方程式**という）であり，p,q,r で λ を表せる．その 1 つを選ぶと，元の方程式は

$$(x^2+\lambda)^2=(\sqrt{2\lambda-p}\,x+\sqrt{\lambda^2-r})^2$$

（ただし，2 つの平方根は，展開したときに x の係数が $-q$ となるように選ぶ）となり，したがって

$$\left(x^2-\sqrt{2\lambda-p}\,x+\lambda+\sqrt{\lambda^2-r}\right)$$
$$\times\left(x^2+\sqrt{2\lambda-p}\,x+\lambda-\sqrt{\lambda^2-r}\right)=0$$

と表せる．よって 2 次方程式の解の公式を用いて 4 つの解がすべて表せる．

5.3 4 次方程式のオイラーの解法

もう 1 つ，オイラーの解法についても述べよう．次の恒等式を用いる．

$(x+y+z+w)(x+y-z-w)(x-y+z-w)(x-y-z+w)=x^4+y^4+z^4+w^4-2(x^2y^2+x^2z^2+x^2w^2+y^2z^2+y^2w^2+z^2w^2)-8xyzw.$

これと方程式の左辺

$$x^4+px^2+qx+r$$

の係数を等しいとおくと

$$p=-2(y^2+z^2+w^2),$$
$$q=-8yzw,$$
$$r=(y^2+z^2+w^2)^2-4(y^2z^2+y^2w^2+z^2w^2)$$

となる．解と係数の関係より，y^2,z^2,w^2 は次の t に関する 3 次方程式の 3 解である．

$$t^3+\frac{p}{2}t^2+\frac{p^2-4r}{16}t-\frac{q^2}{64}=0.$$

これを解いて y^2,z^2,w^2 を求めることができる．開平して y,z,w を $yzw=-\frac{q}{8}$ となるように選ぶ方法は，1 つの解に対し y,z,w のうち 2 つの符号を変える分もあるので，全部で 4 通りある．その 1 つを固定すると，$x=-y-z-w$, $-y+z+w$, $y-z+w$, $y+z-w$ と書ける．

> **問題** (6) $x^4-4x^3-16x^2+88x-92=0$ を解け．

なお 3 次方程式でも同様に $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の因数分解を用いて説明することもできる．

5.4 相反方程式

係数が次数に関して対称になっている方程式を**相反方程式**と言う．例えば

$$x^6+3x^5+12x^4-7x^3+12x^2+3x+1=0$$

を考える．$x=0$ は解ではないから，中央の x^3 で割っても同値で，

$$x^3+3x^2+12x-7+\frac{12}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0.$$

これは次のように $t=x+\frac{1}{x}$ の多項式で表せる．

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^3-3t,$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$$

より，$t^3-3t+3(t^2-2)+12t-7=0$．整理して $t^3+3t^2+9t-13=0$．$u=t+1$ とおいて 2 乗の係数を消すと，$u^3+6u-20=0$．これから $u=2,-1\pm i\sqrt{3}$, $t=u-1=1,-2\pm i\sqrt{3}$. $x^2-tx+1=0$ から

$$x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

により x が求まる．

■ 6. 複素数以外の場合 ■

四元数体 $\boldsymbol{H}=\{a+ib+jc+kd \mid a,b,c,d\text{は実数}\}$ $(i^2=j^2=k^2=ijk=-1)$ では，$x^2=-1$ の解は無限個ある．実際，解集合は $\{ib+jc+kd \mid b^2+c^2+d^2=1\}$ となり，2 次元球面になる．$\boldsymbol{H}$ は非可換であり，定理 2 は成り立たないのである．

四元数は特別な形の複素 2 次行列として表すことができるが，成分を複素数とする行列の場合，行列の複素数係数多項式方程式 $f(X)=O$ の解 $X=A$ は，A の最小多項式が $f(x)$ を割り切ることから，ジョルダン標準形の言葉で容易に表すことができる．

正標数の場合は，方程式の次数以下の素数の逆数が係数環 R に入るとすると，今までの公式はほぼ同様にできる．しかし，一般にはカルダノ変換も冪根を取ることも有効でなく，別の方法が必要になる．例えば，体 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ では，$x^2+x+1=0$ を平方完成しようとしても，$2=0$ なので割ることはできない．$\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$ であり，平方根をとっても新しい数は出てこない．

解の 1 つを α とすると，もう 1 つの解は $\alpha-1$ となることが容易に確かめられる．解を作ることは，$\alpha(\alpha-1)=1$ から α を求めることで，ジョルダンの階乗関数の等分操作を許すことになる．一般に，標数 p ではフェルマーの小定理より $x^p-x=x(x-1)\cdots(x-p+1)$ であり，$x^p-x=a$ の解を求める操作は，アルティン＝シュライヤー拡大と呼ばれる．

この小文の先には，ガロア理論やニュートン法，モジュラー関数といった，一般論・近似解法・超越的方法などが広がる．方程式の解法は長い長い歴史をもち，数学的にも，人間ドラマとしても興味深い題材がたくさんある．参考文献を一例として挙げたので，参照していただきたい．

問題解答．(1) $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$．(2) $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$．(3) $\frac{1}{2}(\pm1\pm i\sqrt{3})$（以上複号任意）．(4) 略．3 次方程式の解法も見よ．(5) 略．(6) $1\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{6}$（マイナスは奇数個）．

参考文献

1) 木村俊一，『天才数学者はこう解いた，こう生きた—方程式四千年の歴史』，講談社メチエ 225，講談社，2001.
2) Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, 2007（和訳：『もっとも美しい対称性』（水谷 淳訳），日経 BP 社，2008）.

（こばやし・まさのり，首都大学東京大学院理工学研究科）

体と代数方程式

ガロア理論とは何か



三宅 克哉

1. 序

ガロアの理論は代数方程式の根と係数の関係の背後にあるメカニズムを解き明かすものだと言ってもよい．ただし，普通「根と係数の関係」と言われるものは最も形式的な場合のものを言う．例えば 2 次の場合，

$$P(X) = (X-\alpha)(X-\beta) = X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta$$

の左辺に現れる $P(X)$ の根 α, β と右辺の係数 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ の関係を言う．

ここで「最も形式的なもの」といった意味は，例えば，「特定の多項式」の展開

$$P(X) = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3}) = X^2-3$$

とを比べれば分りやすい．この場合に等式 $\sqrt{3}+(-\sqrt{3}) = 0, \sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}) = -3$ をことさら「根と係数の関係」と呼ぶならば，何か誤解を呼びそうな気がする．

一方，この「特定の多項式」の場合，2 次式 X^2-3 の根の $\pm\sqrt{3}$ という数はある意味で悩ましい一面を持っている．古代ギリシアのピュタゴラス学派を悩ませたように，これは有理数ではない．また $\sqrt{3} = 1.73205080756\cdots$ と表してみても必ずしもその本性に触れてはいない．他方ガロアの理論は，$\sqrt{3}$ が 2 次方程式 $X^2-3=0$ の根であってしかも有理数でないという性質に着目する．それは一般に「特定の多項式」の根とその多項式の係数の間の関係の複雑さを解きほぐす．

19 世紀前半のアーベルやガロアまでは，もっぱら 5 次方程式の解法，それも平方根，立方根，4 乗根，5 乗根を組み合わせた根の公式を見つけることが問題だった．2 次方程式の解法についてはすでに 3,500 年もさかのぼるバビロニアで十分に習熟され，活用されていた．ところが 3 次方程式となると，例えば中国の古典にも見られるように根を近似していく手法は知られていたものの，イタリア・ルネサンス後期に至るまでは目立った形では取り上げられてはいなかった．そして 16 世紀に入ると画期的な展開があり，デル・フェルロ，タルターリア，カルダーノ，フェルラーリによって 3 次方程式と 4 次方程式の根の公式が見出された．そして達人として名をあげようと 5 次方程式に取り組み，歴史に名を残し損なった人々が続くことになった．

この流れに新たな方向性を与えたのは 1771–72 年のラグランジュの論文だった．彼は 3 次と 4 次の方程式の解法を分析し，5 次方程式の解法を見出す**戦略**を立てた．その戦略というのは，5 変数の（有理数を係数とする）有理関数で，方程式の 5 個の根のすべての並べ替え（順列）を代入して得られる関数値をすべて考え，異なる値が 4 個以下になるものを探すというものである．しかし 4 次の場合とは異なり，関数値の個数が 1 個と 2 個のもの以外には 5 個以上のものしか見つからず，彼の戦略そのものは失敗に帰した．とはいえ，方

程式のすべての根とそのすべての順列を考察するという視点はアーベルやガロアによって豊かな実りをもたらした．

もう一点を強調しておくと，18世紀の末から19世紀の初めの頃にガウスが提示した複素数における「代数学の基本定理」の確立は，方程式をめぐる「形式的なもの」と量（ないしは数）を対象とする「特定のもの」との差異を明確にし，おそらくはアーベルやガロアの考察への明解な土壌と基盤を整えた．

1 次方程式

最も一般的な 1 次方程式は変数 X と定数 a, a', b, b' によって

$$aX + b = a'X + b'$$

の形で与えられる．これを整理し，$(a - a')X = b' - b$ と表せば，方程式の解は次のように述べられる．

- $a \neq a'$ の場合，**どのような** b, b' に対しても必ず解が**ただ一つ存在し**，$X = (b' - b)/(a - a')$ で与えられる；
- $a = a'$ の場合，$b = b'$ の**ただ一つの場合**に限り解を持ち，**どのような** X の値もすべて解である．

このように，一般には係数の世界での加法，減法，乗法に加えて 0 と異なる数による除法（すなわち**四則演算**）が必要である．

なお，わざわざ2つの場合を併記したのは，ここでは触れることはないが，n 変数 n 個の連立 1 次方程式の場合にこれら2つの場合を両極端とする中間段階を導入して一般化されるからである．

2 次方程式

上のように最も一般的な形の 1 次方程式の場合から出発してそれを簡略化していく過程では，係数の世界での四則演算が必要だった．これを確認しておいた上で，煩雑さを避けて，

$$aX^2 + bX + c = 0, \quad a \neq 0,$$

の形の 2 次方程式から出発しよう．このとき，係数の世界での除法を用いて両辺に a^{-1} を掛ければ，必要なら b, c を取り直して，特に $a = 1$ であるとしてよいだろう．次に左辺を完全平方の形に導くために両辺に $b^2/4$ を加え，さらに定数の c を右辺に移項して「通分」すれば

$$\left(X + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}$$

が得られる．そこで両辺の平方根を取り，左辺の $b/2$ を移項すれば

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

となる（ただし**序**で触れた古代バビロニアでは，2 根を α, β とするときの係数 $b(= \alpha + \beta)$ と $c(= \alpha\beta)$ を用いて $b^2 - 4c = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$ を作り，その正の平方根を取って $\alpha - \beta$ を得，さらにそれと $\alpha + \beta = b$ とを加えて 2 で割り，根のひとつを取り出すのが標準的な解法であった）．

因に，825 年頃にイスラームの数学者フワーリズミ（Muhammad ibn-Mūsā al-Khwārizmī）が等式の片方の辺のある項を他の辺に移項することに相当する変形を al-jabr（al は定冠詞）と，また両辺から等しい量を同時に引き去ることを al-muqābala と呼び，これらを代数等式における基本変形として取り上げるとともに，その著作の題名に用いた．こういった手法の呼び名はそのうちに簡約されて単に al-jabr と言われるようになり，それがヨーロッパに導入されるにあたって algebra と表された．

純 3 次方程式

まず純 3 次方程式

$$X^3 - c = 0$$

の 3 根を見よう．その一つを $\sqrt[3]{c}$ とし，複素数 $\omega := (-1 + \sqrt{-3})/2$ を取る．このとき $\omega^3 = 1$ であり，$\omega, \omega^2, \omega^3 = 1$ が $X^3 - 1 = 0$ の 3 根を与えている．したがってもとの方程式 $X^3 - c = 0$ の 3 つの根は $\sqrt[3]{c}, \omega\sqrt[3]{c}, \omega^2\sqrt[3]{c}$ である．特に c が実数の場合，$\sqrt[3]{c}$ としては通常は実数を取る．したがって他の 2 根 $\omega\sqrt[3]{c}, \omega^2\sqrt[3]{c}$ は実数ではなく，

複素数である．このように，方程式 $X^3-c=0$ の 3 根をすべて用意するとき，必然的に -3 の平方根である虚数 $\sqrt{-3}$ が現れる．

巡回 3 次方程式

次に 3 次方程式

$$P(X) := X^3-(s-3)X^2-sX-1=0$$

を取り上げよう．この場合，根の一つを α とすれば，他の 2 根は $\beta := -1/(\alpha+1)$ と $\gamma := -1/(\beta+1) = -(\alpha+1)/\alpha$ で与えられる．実際，$P(X)$ が等式

$$-(X+1)^3P\left(\frac{-1}{X+1}\right) = P(X)$$

を満たすことが簡単に確認できる．また $\alpha := -1/(\gamma+1)$ であることは見やすいだろう（このことからも $P(X)$ を巡回 3 次多項式と呼ぶことが納得できる）．ともかくも $P(X)$ は一つの根 α が与えられれば，他の 2 根はその有理式として与えられてしまい，例えばさらに平方根を用意する必要はない．

一般の 3 次方程式

今度は 3 次多項式 $Q(X)=X^3+aX^2+bX+c$ による方程式 $Q(X)=0$ を考察する．2 次の場合の完全平方を作る手法を真似て $Y=X+a/3$ とおけば，$Q(X)=Y^3+b'Y+c'$ の形に変形される．そこで記号を節約するために $a=0$ とする．もし $c=0$ なら直ちに 2 次の場合に帰着され，$b=0$ の場合は純 3 次の場合になる．そこで $bc\neq 0$ と仮定し，$Q(X)$ に b^3/c^3 を掛け，$t := b^3/c^2$ と置いて bX/c を新たに X と書き直せば，方程式 $Q(X)=0$ は

$$P(X) := X^3+tX+t=0$$

の場合に帰着される．

そこでこの方程式の根の一つを α とする．このとき

$$\begin{aligned}P(X) &= X^3+tX+t\\ &= (X-\alpha)(X^2+\alpha X+(\alpha^2+t)),\end{aligned}$$

$$t=\frac{-\alpha^3}{\alpha+1},$$

であり，他の 2 根は 2 次方程式 $X^2+\alpha X+(\alpha^2+t)=0$ から得られる．ただし t と α の関係は $P(\alpha)=0$ から得られる．この 2 次方程式の根は

$$X=\frac{-\alpha\pm\sqrt{-(3\alpha^2+4t)}}{2}$$

である．ところが少々煩雑な計算によって確認できるのだが，

$$-(3\alpha^2+4t) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha^2(2\alpha+3)}\right)^2 t^2(-4t-27)$$

となっている．これから $\sqrt{-(3\alpha^2+t)}$ は結局 α の整数係数の簡単な有理式と $\sqrt{-4t-27}$ の積である．したがって一般的にはこの 3 次方程式の α 以外の 2 根を得るためには，α に加えて新たに平方根 $\sqrt{-4t-27}$ が必要になる．この平方根はもとの 3 次多項式 $P(X)=X^3+tX+t$ の係数から直接導かれ，根 α には直接には依存していない．なお 3 次多項式 X^3+tX+t の判別式は $t^2(-4t-27)$ である（純 3 次方程式 $X^3-c=0$ の場合，すべての根を得るためには c ないしは $\sqrt[3]{c}$ と無関係な $\sqrt{-3}$ が必要であった）．

2. 体，同型写像，ガロア群

有理数の全体の集合 $\mathbb{Q}$ のように四則演算についてその中で充足しているものを**体**と言う．与えられた代数方程式の係数から四則演算によって得られるもの全体の集合 K とか，それらに新たに α を加えて構成される体 $K(\alpha)$ や，さらに平方根 $\sqrt{-4t-27}$ を加えて構成される体 $K(\alpha,\sqrt{-4t-27})$，あるいは与えられた K に係数を持つ方程式の（例えば複素数体における）すべての根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ を K に加えて構成される体 $K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ などが考えられる．また場合によっては n 個の変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の K に係数を持つ有理式全体から構成される体 $K(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を考えることもある．

体 K を含む 2 つの体 L_1, L_2 に対して，写像

$\sigma : L_1 \to L_2$ がそれぞれの四則演算を対応させ，K においては恒等写像であり，しかも全単射であるとき，すなわち $a, b \in L_1$ に対して $\sigma(a \pm b) = \sigma(a) \pm \sigma(b), \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$ を満たし，$a \in K$ に対しては $\sigma(a) = a$ となっており，しかも $\sigma(L_1) = L_2$ となっているとき，σ を K 上の**同型写像**と言う（L_1 が体であるとき，これは自明なイデアルしか持たない．したがって条件 $\sigma(L_1) = L_2$ から σ は自動的に単射になる．下の準同型定理を参照）．特に $L_1 = L_2 = L$ である場合，この $\sigma : L \to L$ を L の K 上の**自己同型写像**と言う．さらに K 上の自己同型写像全体の集合を

$$\mathrm{Aut}(L/K) := \{\sigma \mid \sigma : L \to L \text{ は } K \text{ 上の自己同型写像}\}$$

とすると，これは合成写像を構成するという「演算」によって**群**になる．すなわちこの演算を「積」とすれば $\mathrm{Aut}(L/K)$ はこの積に関して閉じており，結合的（$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$）であって単位元として恒等写像 id を持っており，各 σ に対して逆写像 σ^{-1} が「逆元」である．

特に L が K に係数を持つ一つの多項式 $P(X)$ のすべての根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を K に加えて得られる体 $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ であるとき，L/K を**ガロア拡大**と言い，このときの $\mathrm{Gal}(L/K) := \mathrm{Aut}(L/K)$ を L/K の**ガロア群**と言う．いよいよガロアの理論の主役が登場した！

この体 $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ においては多項式 $P(X)$ は

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$

と 1 次式の積に完全に分解される．そこでこの L を多項式 $P(X)$ の K 上の**最小分解体**と言う．

例 1. 2 次体：一般に有理数の平方でない有理数 $a \in \mathbb{Q}$ に対して $\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であり，そのガロア群は $\{\sigma, id\}, \sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ である．

例 2. 巡回 3 次体：有理数 $s \in \mathbb{Q}$ に対して $X^3 - (s-3)X^2 - sX - 1 = 0$ の根の一つを α とするとき，$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であり，$\sigma(\alpha) = -1/(\alpha+1)$ で特徴づけられる $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ を取るとき，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3 = id\}$ である．

例 3. 一般の 3 次多項式の最小分解体：有理数 $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, -27/4\}$ で，$-4t - 27$ が有理数の平方でないものに対し，$X^3 + tX + t = 0$ の根の一つを α とする．さらにこの方程式は有理数を根には持たないとする．このとき，$L := \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-4t-27})$ すると，$L/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であり，$\mathrm{Gal}(L/K)$ は位数 6 の 3 次対称群，すなわち 3 文字の置換全体の群と同型である．しかし $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大でない．

3. 多項式環，代入，準同型定理

ともかくも体 K を定め，そこに係数を持つ変数 X についての多項式全体の集合を $K[X]$ と表して K-係数の**多項式環**と言う．この集合は加法，減法，乗法に関しては閉じているが，除法に関しては閉じていない．係数の体を指定することによって多項式の**既約性**を定義することができる．多項式 $P(X) \in K[X]$ が K 上で**可約**であるとはそれが $K[X]$ の定数ではない 2 つの多項式の積に分解されることを言う．また $P(X) \in K[X]$ が K 上で可約でないとき，$P(X)$ は K 上で**既約**であるという．例えば係数を有理数に限ったとき，多項式 $X^3 - 1$ は $\mathbb{Q}$ 上で可約であるが，$X^3 - 2$ は $\mathbb{Q}$ 上で既約である．

問題：多項式 $X^4 + 1$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上では既約であるが，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上では可約であることを示せ（ヒント：$(\sqrt{2}X)^2 = 2X^2$ に注目すること）．

さて，K を含む体 F の一つの要素 $\alpha \in F$ を取り，多項式 $A(X) \in K[X]$ の X に α を代入する．このとき，各 $A(X)$ に対してその値 $A(\alpha) \in F$ が定まる．すなわち写像 $\varphi : K[X] \to F$ が得られる．これは環の準同型写像である．すなわち $K[X]$ の和，差，積を F における和，差，積

に写す：$A,B \in K[X]$ に対して $\varphi(A \pm B) = \varphi(A) \pm \varphi(B), \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ が成り立っている．しかも $a \in K$ に対しては $\varphi(a) = a$ である．そこで

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{A \in K[X] \mid \varphi(A) = 0\},$$
$$\mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(A) \mid A \in K[X]\}$$

と置き，これらをそれぞれ φ の**核**，**像**と言う（像は F に含まれる環であり，核は環 $K[X]$ のイデアルになっている）．特に $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ となるとき，像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ は $K[X]$ の忠実なコピーになっている．このとき当初の $\alpha \in F$ は K 上**超越的**であると言い，そうでないとき α は K 上**代数的**であると言う．

後者の場合，核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ の 0 でない要素のうちで多項式としての次数が最小で（定数倍して）最高次の係数が 1 のもの $P(X)$ を取るとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\varphi) &= P(X)K[X] \\ &= \{P(X)A(X) \mid A(X) \in K[X]\}\end{aligned}$$

となっている．特に $P(\alpha) = 0$ であり，α は $P(X) = 0$ の根である．しかも $P(X)$ は K 上既約である（実際，もし $P(X) = Q(X)R(X), Q, R \in K[X] \backslash K$, と分解されるとすると，$Q(\alpha)R(\alpha) = 0$ となり，体 F の数 $Q(\alpha)$ と $R(\alpha)$ の少なくとも一つは 0 に等しい．それを $Q(\alpha) = 0$ だとすると $Q(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ であって，しかも Q の次数が P のそれよりも小さくなり，P の選び方と矛盾する）．さて，多項式 $A(X) \in K[X]$ に対して $A(X)$ を $P(X)$ で割った余りを $A_0(X)$ としよう；$A(X) = H(X)P(X) + A_0(X), H, A_0 \in K[X]$, であり，しかも $A_0(X)$ の次数は $P(X)$ の次数よりも小さい．このとき $\varphi(A) = \varphi(A_0)$ であり，φ の値は $A_0 + P(X)K[X] = \{A_0 + HP \mid H \in K[X]\}$ の上で同一である．したがって φ は**剰余環** $K[X]/\mathrm{Ker}(\varphi)$ から F への全単射 $\bar{\varphi}: K[X]/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Im}(\varphi)$ を引き起こす．しかも P が K 上既約であることから，これら 2 つの環は体になる．実際，上の記号で $A_0 \neq 0$ とすれば A_0 と P との最大公約因子は 1 である．したがって環 $K[X]$ で「ユークリッドの互除法」を行えば，

$$1 = S(X)A_0(X) + T(X)P(X), \quad S, T \in K[X]$$

と表される．よって $S(X) + P(X)K[X]$ および $\varphi(S) = S(\alpha)$ はそれぞれの環の中での $A_0 + P(X)K[X]$ および $A_0(\alpha)$ の乗法に関する逆元になっている．以上をまとめれば次の定理が得られた．

準同型定理：上記の記号の下で，α は K 上代数的であるとする．このとき α の代入によって得られる準同型写像 φ は抽象的な $K[X]$ の剰余体から K と α から構成される体への K 上の同型写像 $\bar{\varphi}: K[X]/P(X)K[X] \to K(\alpha), \bar{\varphi}(X) = \alpha$, を与える．

系：方程式 $P(X) = 0$ の F 内のもう一つの根 β に対して，抽象的な剰余体 $K[X]/P(X)K[X]$ を通して K 上の同型写像 $\psi: K(\alpha) \to K(\beta)$ であって $\psi(\alpha) = \beta$ となるものが存在する．

逆に次の命題が成り立つ．

命題：体 K 上の同型写像 $\psi: K(\alpha) \to K(\beta)$ であって $\psi(\alpha) = \beta$ となるものが与えられたとき，β は方程式 $P(X) = 0$ の根である．

実際，$P(X)$ を K-係数の単項式の和として表し，X に α を代入したものを ψ で写せば，$P(\psi(\alpha)) = \psi(0) = 0$ が得られる．

4. ガロア拡大の同型写像と根の置換

いよいよガロア拡大 L/K と L を最小分解体とする多項式 $P_0(X) \in K[X]$ との関係を見よう．まず一般的に，$P_0(X)$ は必ずしも K 上既約であるとは限らないで始めよう．その次数を N とすれば，前提からそのすべての根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ が L に含まれ，$L = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ である．次に $P_0(X)$ の K 上での既約因子の一つを $P(X)$ とし，その次数を n とする；$n \leq N$ である．また簡明に，初めの n 個の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ が $P(X)$

の根であるとする．

さて，アーベルもガロアも次の命題を基本的な道具立てとした（これは一般の有限次拡大に対して成り立つ）．

命題：有限次拡大 L/K において $L=K(\xi)$ となる $\xi\in L$ が存在する．

このとき ξ は K 上代数的であり，多項式 $T(X)\in K[X]$ で $T(\xi)=0$ となるものがある．必要なら適当に T の K 上既約な因子で ξ を根に持つものを取り，T は K 上で既約であるとしてよい．そこで L を含む十分大きな体 F の中で $T(X)=0$ のもう一つの根 ξ' を取れば，体の K 上の同型写像 $\psi: L=K(\xi)\to K(\xi')$ で $\psi(\xi)=\xi'$ となるものが存在する．一方，各 $\alpha_j, 1\le j\le N$, は多項式 $P_0(X)$ の根である．よって $P_0(\alpha_j)$ を単項式の和に展開して ψ で写せば，$\psi(\alpha_j)$ はやはり $P_0(X)$ 根であり，よって $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ のどれかになる．このように $\psi(\alpha_1),\ldots,\psi(\alpha_N)$ は $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ の置換を引き起こし，また $P(X)$ の根全体の $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ の置換を引き起こす．さて，$\psi(\alpha_1),\ldots,\psi(\alpha_N)$ はすべて L に含まれており，したがって ψ の像 $\psi(L)$ は $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)=L$ と一致する．したがって $\psi(\xi)=\xi'$ は L に含まれており，実は ψ は L の K 上の自己同型写像である．このように L は $T(X)\in K[X]$ の K 上の最小分解体でもある．以上から次の定理が得られる．

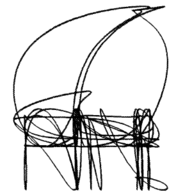
定理：ガロア拡大 L/K において状況と記号を上の通りだとするとき，$\mathrm{Gal}(L/K)$ の各要素は $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ の置換を引き起こし，特に既約多項式 $P(X)$ の根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ の置換を引き起こす．

なお，多項式 $T(X)$ の次数を d とするとき，その d 個の根 $\xi=\xi_1,\ldots,\xi_d$ はすべて $L=K(\xi)$ に含まれている．また $T(X)$ は K 上で既約であるから，d 個の ξ_j のどれを指定しても体 $L=K(\xi)$ の K 上の自己同型写像 $\sigma_j, 1\le j\le d,$ で $\sigma_j(\xi)=\xi_j$ となるものが存在する．ところが $\xi_i, 1\le i\le d,$ は $L=K(\xi)$ の要素として K 係数の ξ の有理式（実は多項式）の形に表される．よって各 σ_j によって自動的にその行き先が確定してしまい，$\mathrm{Gal}(L/K)$ の各要素は $\xi_1,\ldots,\xi_d$ のちょうど d 個の置換しか与えない．これら d 個の要素についての置換全体となると総数が $d!=1\cdot 2\cdots d$ 個もあるが，そのうち $\mathrm{Gal}(L/K)$ の要素から得られる d 個だけが多項式 $T(X)\in K$ の本性を表現するものとして選び出されたわけである．同様に，$\mathrm{Gal}(L/K)$ の要素から引き起こされる $P(X)$ の根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ の置換が $P(X)\in K[X]$ の本性を表すものとしてその n 個の根の $n!$ 個の置換全体から選び出された．特に $P_0(X)=P(X)$ である場合，$L=K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ であるから，$\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$ が $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ の置換として自明なもの，すなわち，$\sigma(\alpha_1)=\alpha_1,\ldots,\sigma(\alpha_n)=\alpha_n$ であるならば，σ は L の自己同型写像としても自明なものであり，$\sigma=id$ である．よって $P(X)$ の根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ の $n!$ 個の置換から d 個の置換が選ばれることになる．**ここに方程式論におけるアーベルやガロアの成功の鍵がある．**

紙数に制限があり，残念ながらガロアの理論の全体像を正確に紹介することはできない．さらに踏み込みたい読者は，いくつもある教科書から自分にとって手触りのよいものを選んで勉強されたい．

（みやけ・かつや，東京都立大学名誉教授）

代数学的な方程式と解析学的方程式の違い



梅村　浩

1. 方程式は数学研究の原動力

方程式の研究，特に方程式を解くことが数学研究の大きな推進力であることは疑う余地のないことである．

数学，科学の発展とともに，人類はたくさんの方程式と出会ってきた．代数学においては，1次方程式，連立1次方程式，高次方程式，さらに，Fermat の問題に代表される不定方程式を忘れてはならない．17世紀，微分積分学と古典力学が発見されると，さらに微分方程式が加わった．

名前の付いた方程式も多い．Pell 方程式，超幾何方程式，Riccati 方程式，熱方程式，….このように，名前の付く方程式は，代数学よりも，解析学，物理学に圧倒的に多いことに注意しよう．

2. 方程式研究は時代遅れか

2010年の4人のフィールズ賞受賞者の中で，C. Villani というフランスの数学者が，Boltzmann 方程式の研究の成果によってメダルに輝いているが，その他の3人の受賞者の業績は方程式論とは，全く関係がないように見える．

それならば，方程式研究は時代遅れになってしまったのかと言うと，微妙なところであるが，そうではないと思われる．

3. 方程式を消去せよ

方程式論の発展の様子が一番簡単に理解できる代数方程式を例にとって考えてみよう．1次，2次，3次と代数方程式を解く試みの永い歴史の後，19世紀に Galois 理論が発見された．Galois 理論は代数方程式の不変量として，その Galois 群と呼ばれる群を付随させる理論である．Galois の原論文では，Galois 群は与えられた代数方程式の解全体のなす集合の置換群である．

Galois の論文が，即座に理解されなかったように，この方法で Galois 群を定義するのは，得策ではない．現在では，方程式の定める体の Galois 拡大 L/K を考え，Galois 群を L/K の自己同型群として定義する．今日，この定義は当然のものであると思われているが，これは19世紀，Dedekind による革新的なアイディアである．

ここに，それ以降の代数学，代数幾何学の発展の核となった原理が含まれている．

基本原理　代数方程式の研究は，それが決める拡大体の研究に帰着する．

代数方程式論は，Pell 方程式[*1)]のような不定方

*1)　n を正の整数とするとき，不定方程式 $x^2 - ny^2 = 1$ を Pell 方程式という．この方程式の整数解 (x, y) を求めるのが問題である．

程式の研究，つまりDiophantos方程式論も含んでいる．したがって，可換環の拡大の理論と代数方程式論の区別はない．それどころか次のように言うこともできる．

Grothendieckによるスキーム理論，およびそれのその後の発展は代数方程式論に他ならない．

バビロニア，ギリシア，インド，アラビア，ルネサンス以降のヨーロッパで，代数方程式が研究されてきたが，その最終的な形が代数幾何学原論É.G.A.（Éléments de géométrie algébrique）であると考えることができる．

4. 方程式に代わるもの

一般の代数方程式は消えてしまったが，実は名前を変えて生き続けているものがある．特別な多様体である，楕円曲線，代数曲線，Jacobi多様体，$K3$曲面，…等である．これらの重要な代数多様体は特別な代数方程式系に他ならない．解析学で言えば特殊関数に相当する．ただし，次の点に注意する必要がある．代数方程式系は代数多様体を決めるが，その多様体が，例えばAbel多様体であるかどうかは与えられた方程式系を見ていても解らない．つまり，次のように結論できる．

方程式を，そのまま研究するのには限界がある．

保型形式の研究により，メダルを受賞したNgô Bảo Châuの仕事は代数方程式論の発展したものであり，そう考えれば，方程式の研究が時代遅れというわけではない．

5. 解析学の難しさ

代数方程式を解く試みの中から芽を出した苗は，スキーム論の広大な森に育った．同様のことを解析学における方程式に期待したいところである．しかし，話はそれほど簡単ではない．代数学から解析学に目を移すと，果てしない原野が続くばかりで，オアシスをそこに見つけるのは容易ではないことに気が付く．

専門外の分野については，軽率な発言を慎むべきであろうが，例えば微分方程式を例にとれば，解析学における方程式研究の難しい点は，方程式系を消すような一般論が作れない点にあるように思われる．微分幾何学が，すべての微分方程式論を含んでいるわけではないのであろう．

方程式を消去するどころか，微分方程式の表示自体に，それが，例えばHamilton系であるとか，意味があることが多い．このような理由から，代数学と比べて，解析学，物理学，応用数学に特別な名前の付いた方程式が多いのであろう．

特別な，ある方程式を解こうとする試みの中に，新しいオアシスを発見するチャンスが潜んでいるのであろう．例えば，ソリトン方程式がそうであった．19世紀における自然現象の観察に始まり，現象のモデル化，物理学者，応用数学者も含めたソリトン方程式を解く試み，さらにはコンピュータの発達も加わり，最後には普遍Grassmann多様体上の力学系として，佐藤によって数学的に定式化されたのであった．

（うめむら・ひろし，名古屋大学名誉教授）

森脇　淳

代数系とその関連分野を学ぶために

代数系は抽象的な公理系によって定められるが，その題材が小学校，中学校，高等学校と親しんできた整数，有理数，実数，複素数，多項式，有理式，あるいは，ベクトルにあるので，初学者にも比較的親しみやすいものである．しかしながら，それを極めるためには多くの困難が立ちはだかる．この読書案内が少しでもお役に立てば幸いである．

さて，代数学の抽象化が具体的な問題の解決に決定的な意味を持った定型的な例はどのようなものがあるだろうか？

一つの例はガロアによるガロア理論であろう．代数方程式の根の置換から生じる群の構造が根の可解性に決定的な意味をもつというガロアの発見である．ガロアの数奇な運命と相まって彼のファンは多いことだろう．ガロア理論の入門書は数多くある．その中でも私の好きな古典的名著はエミール・アルティンによる『ガロア理論入門』である．線形代数学のエッセンスも含めても，オリジナルの英語版は 82 頁しかなく，あっという間に読了できる本である．

もう一つの典型的な例は，ゴルダン問題に対するヒルベルトの解答であろう．ゴルダン問題とは群作用が定まっている多項式環の不変式環の有限生成性を問う問題である．ヒルベルト以前は，具体的な群作用に応じて，個別に不変式が求められていたが，今日にいうヒルベルトの基底定理を用いることで，ヒルベルトはこの問題を解決した．当時の不変式論の大家であるゴルダンをして「これは数学ではない！ これは神学だ！」と言わしめた結果である．ヒルベルトの基底定理の証明のエッセンスである有限性の保証は，現在でも，グレブナー基底計算の基礎になっている．ヒルベルトの基底定理も含む代数学一般の教科書として，少し躊躇しつつも，おすすめしたいのが，永田雅宜著『可換体論』である．日本語としては薄い本であるが内容がしっかり詰まりすぎている本でもある．

始めに，述べたように，代数学はその入り口は口当たりがよく，多様体論が中心となる幾何学の敷居の高さや ϵ–δ 論法に代表される解析における論理のあやの難しさを避けたい学生にとっては代数学は学び易いように見える．果たして本当にそうなのだろうか？ 複雑に絡む代数的事例の中から類似する性質を抜き出し，抽象化することで，本質を見えやすくしたのが抽象代数学である．それは，多様な様相を示すジャングルのガイドブックであって，生きたジャングルそのものではない．教科書でサバイバルの方法を身につけた学生諸君は，生きたジャングルへ冒険してもらいたい．どの理論もそうであるが，具体的な使われ方を知らなくてはその理論の真の価値は理解できない．

その意味からも，抽象代数学の生きた使われ方を書かれている本も若干紹介したいと思う．抽象代数学の使用の主戦場は数論と代数幾何学である．最近では，その２つを合わせた数論幾何であろう．数論の分野からおすすめするのがセールの『数論講義』である．いわゆる数学の女王である代数的整数論の本ではないが，広い意味での数論の本である．具体的な問題を，抽象代数学を適切に用いながら解説していく第 1 部は，抽象代数学の使い方を学ぶには絶好のものである．代数幾何から，おすすめするのはフルトンの『代数曲線』である．本文の解説は簡易な英語と相まって，簡潔に書かれており，淡白過ぎるぐらいである．しかしながら，たくさんの問題がついており，これをしっかり解くことで抽象代数学の手触り感が生まれてくると信じる．

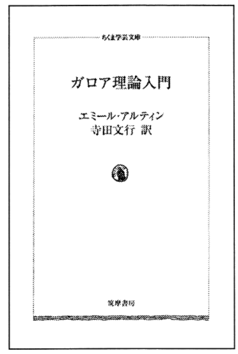
これまで挙げた本は，『可換体論』を除いて，口当たりのよい本である．本格的に研究者を目指している学生諸君には口当たりのよい本だけに留まってほしくない．入り口はそれぞれの研究者によって異なるが，研究の最前線は数理科学の諸分野が折り重なっている．そこで代数幾何の分野から，口当たりのよくない本を挙げたい．マンフォードによる『代数幾何学 1，複素射影多様体』である．この本はいわゆる代数学の本ではない．読みこなすには代数学・幾何学・解析学のすべての分野の知識がそれなりに必要になる．京都大学で代数幾何学を学ばれた多くの研究者は，学部 4 年生時にこの本を読まれている．

最後に，この案内を読まれた方と，将来，数学を語り合えることを期待して，拙文を終わりたい．

（もりわき・あつし，京都大学大学院理学研究科）

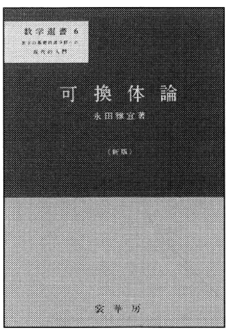
ガロア理論入門

エミール・アルティン著，寺田文行訳，文庫判，224 頁，筑摩書房



英語版はたった 82 頁でおそろしくコンパクトである．しかしながら，必要なことはすべて書いてある．日本語訳では，演習とその解答がついてくる．碩学アルティン著であり，線形代数から始まり，極めて明快である．後にアルティンの補題と呼ばれる群指標に関する結果はこの書によるものである．その後のガロア理論の教科書はこの本をモデルにしていると言って過言ではない．

可換体論

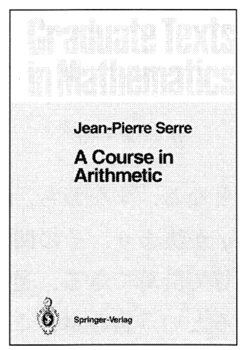


永田雅宜著，A5 判，282 頁，裳華房

この本の長所でもあり，欠点でもあるのは，無駄を省いて書かれてあるため，通常の本であれば補題として独立している内容が，すべて証明内にあり，何が証明にとって重要であったかがわかりにくい点である．本当かどうかは知らないが，永田先生が講義中にある証明に躓かれ，ご自身の本を見てみると「明らか」と書いてあったという伝説がある．

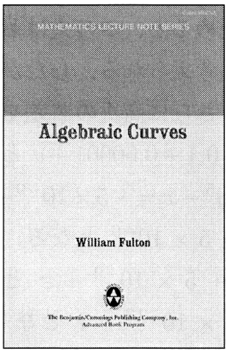
A Course in Arithmetic

J.-P. Serre 著，132 頁，Springer-Verlag



原著『Cours d'Arithmétique』はフランス語で書かれており，上記はその英訳である．日本語訳は『数論講義』(彌永健一訳) として岩波書店から出版されていたが，現在は絶版中である．さすがはセールの本である．極めて明断に無駄なく書かれており，ノルマリアンとはこうあるべきと示している本である．しかしながら，そこがこの本の欠点でもある．美しい本は修行には不向きである．

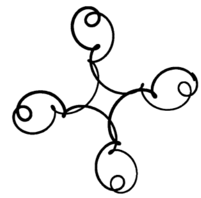
Algebraic Curve



W. Fulton 著，240 頁，The Benjamin/Cummings Publishing Company

原著は現在絶版中であるが，TeX 化されたものが http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf からで入手可能である．環と加群の初等的な内容の解説から始まり，ベズーの定理，リーマン・ロッホの定理まで解説された代数曲線論の入門書である．この本以前には，ウォーカーの『代数曲線』が典型的な入門書であったが，比較すると圧倒的にフルトンの本は明快に書かれている．

5次方程式と微分方程式



落合 啓之

1. ベキ級数解

5次方程式

$$x^5 - x + a = 0 \tag{1}$$

を考える．この5次方程式は，a が特別な値でないときは，四則演算とベキ根では解けないことが知られている．この文では四則演算とベキ根以外のアプローチを見る．

方程式 (1) は，文字 a を y と書くと，

$$y = x - x^5 \tag{2}$$

となる．すなわち，解 x に対して，方程式の係数 y が決まり，その関係式は多項式であり，四則演算で計算できる．逆に方程式の係数から解を求めるという営みは，この関数 (2) の逆関数を求めることにあたる．それは，陰関数で

$$x = y - y^5 \tag{3}$$

と書けるが，方程式を解くという問題はこれが陽関数 $y = y(x)$ として表すことができるか，という問いと言い換えられる．

原点の近くで解 $y = y(x)$ を考えよう．$x = y - y^5$ のグラフ（図1）を見ると原点の近くではおおむね $y = x$ に近いので陽関数が一意に存在することがわかる．

雰囲気をつかむために，まずは数値的に解いてみよう．$x = 0.1$ とする．y の x からのずれを測定するために $y = 0.1 + \varepsilon$ とおき，これを $y - y^5 - x$ に代入し，展開すると，$-0.00001 + 0.9995\varepsilon - 0.01\varepsilon^2 - 0.1\varepsilon^3 - 0.5\varepsilon^4 - \varepsilon^5$ となる．$|\varepsilon|$ は 0.1 よりも小さいと考えているので，ε の高次のベキの項を捨てて係数を丸めると，この式はおよそ $-0.00001 + \varepsilon$ ぐらいと考えられる．したがって，$\varepsilon \fallingdotseq 0.00001$ となる．さらに高次の誤差を計算するために，改めて $y = 0.1 + 0.00001 + \varepsilon$ とおいて同じ計算をすると $y - y^5 - x \fallingdotseq -5 \times 10^{-9} + \varepsilon$ となる．したがって，$\varepsilon \fallingdotseq 5 \times 10^{-9}$ となる．再度，$y = 0.1 + 0.00001 + 5 \times 10^{-9} + \varepsilon$ とおくと $y - y^5 - x \fallingdotseq -3.5 \times 10^{-12} + \varepsilon$ となり，$\varepsilon \fallingdotseq 35 \times 10^{-13}$ が得られる．したがって，近似値として，$y = 0.1000100050035\ldots$ が得られる．

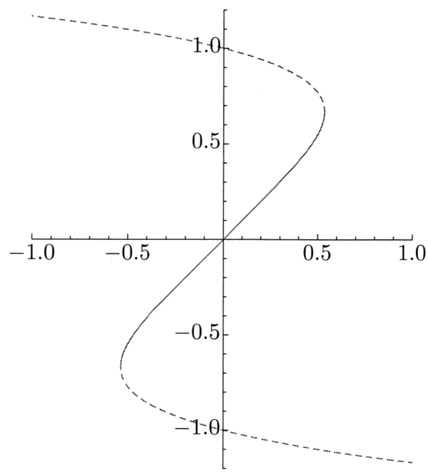


図1　$x = y - y^5$ のグラフ．

この計算は，求めたい逆関数が $y = x + x^5 + 5x^9 + 35x^{13} + \cdots$ となっていることを示唆する．これを，x を変数とする 1 変数**形式ベキ級数環** $R[[x]]$ の中で，再度確認してみよう．$R[[x]]$ で，可換環 R の元を係数とする $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ という形の級数全体を表す．$R[[x]]$ は級数の普通の和と積に関して可換環をなす．$G \subset R[[x]]$ を $a_0 = 0, a_1 = 1$ を満たすものの全体とする．G の 2 つの元 $\varphi(x) = \sum a_n x^n, \psi(x) = \sum b_n x^n$ に対して合成 $\psi \circ \varphi$ を代入 $\psi(\varphi(x))$ によって，すなわち，

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right)^j \qquad (4)$$

で定める．級数自体は形式的な無限和であるが，(4) の右辺を展開し $\sum c_n x^n$ の形に直したとき，各単項式 x^n の係数 c_n の計算は R 内の有限回の加法乗法のみを使っている（adic 位相で収束している）ことが確認できる．

補題 1　G は合成の演算に関して**群**をなす．

すなわち，G の勝手な元は逆元を持つ．証明を眺めてみよう．与えられた $\varphi(x) = \sum a_n x^n \in G$ に対して $\psi(\varphi(x)) = x$ となるような $\psi(x) = \sum b_n x^n \in G$ を構成する．b_n を順次決めて行くことにする．方程式 $\psi(\varphi(x)) = x$ を $O(x^{n+1})$ を法として計算することとし，定義式 (4) を用いると，

$$b_n x^n \equiv -\sum_{k=2}^{n} a_k x^k - \sum_{j=2}^{n-1} b_j \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k \right)^j$$

となる．帰納法の仮定から右辺は $O(x^n)$ に属するので，この式で b_n が一意に決まり，R の加法減法乗法を有限回用いた表示があることがわかる．

例えば $y = x - x^5 \in G \subset \mathbf{Z}[[x]]$ の逆関数は

$$\begin{aligned} y &= x + x^5 + 5x^9 + 35x^{13} + 285x^{17} \\ &\quad + 2530x^{23} + 23751x^{27} + 231880x^{31} + \cdots \end{aligned}$$

となる．

2. 2 次方程式

この級数を解析するために，まずはおもちゃのモデルを扱う．$y = x - x^2 \in G \subset \mathbf{Z}[[x]]$ の逆関数 $x = y - y^2$（図 2）を $\sum a_n x^n$ の形で求めると，

$$\begin{aligned} y &= x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 \\ &\quad + 132x^7 + 429x^8 + 1430x^9 \end{aligned} \qquad (5)$$

となる．この係数に現れる数列は何だろうか？

http://oeis.org/

のページ*1) を開いて

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132

を入力すると，

A000108　　Catalan numbers

という答えが返ってくる．すなわち，

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \qquad (6)$$

であると推測できる．我々は 2 次方程式の根の公式を知っているので，求める関数が $y = (1 - \sqrt{1-4x})/2$ であり，その原点でのテーラー展開がこのような 2 項係数で書けることを知っているが，知らないふりをして続けてみよう．

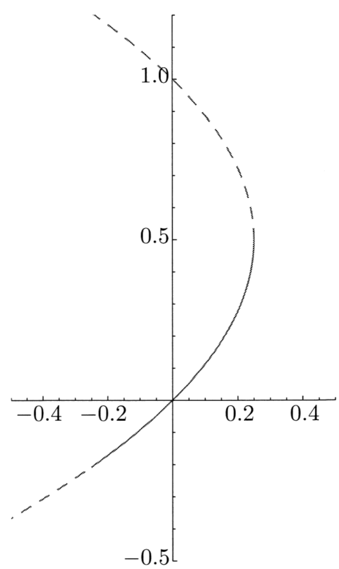


図 2　$x = y - y^2$ のグラフ．

*1）The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™.

逆関数としての定義関係式

$$x = y - y^2 \tag{7}$$

を x で微分すると，

$$y' = 1/(1-2y) \tag{8}$$

が得られる．ここで，多項式 $p(x), q(x)$ が存在して，

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \tag{9}$$

が成り立っているとしよう．y' の式 (8) を代入して分母を払い，さらに $y - y^2 - x$ で割り算すると，余りは

$$-(p(x) + 2q(x))\,y + (2xp(x) + q(x) + 1)$$

となる．この式の y の係数を零と置いて連立 1 次方程式を解くと，

$$p(x) = \frac{2}{1-4x}, \quad q(x) = \frac{-1}{1-4x}$$

が得られる．したがって，y は線形常微分方程式

$$(1-4x)y' + 2y - 1 = 0 \tag{10}$$

を満たす．級数展開 $y = \sum a_n x^n \in G$ を (10) に代入すると，2 項漸化式

$$(n+1)a_{n+1} = (4n-2)a_n \quad (n \geq 1)$$

が得られ，$a_1 = 1$ を満たす解は (6) で与えられることが確認できた．

3. 微分方程式からわかること

この計算の途中で得られた微分方程式 (10) からわかることを述べる．まず，この微分方程式の**特異点**は $x = 1/4$（と $x = \infty$）にある．原点はこの微分方程式の特異点ではないので，形式ベキ級数解 $\sum a_n x^n$ は通常の位相で収束し，収束半径は 1/4 以上であることが a_n の具体的な表示を知らなくてもわかる．実際には比判定

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{4n-2} \to \frac{1}{4} \quad (n \to +\infty)$$

により，収束半径が 1/4 であることを知っている．さらに微分方程式 (10) は

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)y' - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{11}$$

と書き換えられることから，この特異点 $x = 1/4$ は**確定特異点**であり，その**特性指数**は 1/2 である．この微分方程式が平方根を生み出す力になっていることを少し見てみよう．解析的な係数を持つ線形常微分方程式の正則局所解は，特異点を通らない任意の道に沿って解析接続可能である．解析接続の一意性より，ホモトープな道に沿って接続した結果は同じになるから，リーマン球面 $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ から特異点を除いた集合の基本群 $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{1/4\}, *) \cong \mathbf{Z}$ の表現

$$\rho : \pi_1(\mathbf{C} \setminus \{1/4\}, *) \to GL(1, \mathbf{C})$$

が決まる．これを**モノドロミー表現**と呼ぶ．特性指数 1/2 を用いると，原点での局所解 $y - (1/2)$ を特異点 $x = 1/4$ の周りを正の方向に一周する道に沿って解析接続したものは，

$$\exp(2\pi\sqrt{-1} \times (1/2)) = -1$$

倍されることがわかる．すなわち $\rho(m) = (-1)^m$ $(m \in \mathbf{Z})$ である．関数関係が保たれることから，解析接続の結果得られた関数 $\rho_*(1)y$ もまた，代数関係式 (7) や線形常微分方程式 (11) を満たしている．ただし，原点でのテーラー展開が G の形になるという性質は崩れている．具体的には

$$\begin{aligned}
\rho_*(1)y &= \frac{1}{2} + \rho_*(1)\left(y - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \left(y - \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - y
\end{aligned}$$

である．すなわち，特異点の周りを回ることで，一つの解 y から別の解 $1 - y$ を得ることができた．解の具体形をカンニングすると，

$$\begin{aligned}
y &= (1 - \sqrt{1-4x})/2, \\
1 - y &= (1 + \sqrt{1-4x})/2
\end{aligned}$$

となっていて，2 つの解の違いは平方根の取り方の違いに相当する．

さて，いささか不自然な仮定ではあるが，平方根という関数を知らなかったとき，それが線形常微分方程式 (11) からどう産み出されているかを見ておく．変数分離法

$$\frac{dy}{y-(1/2)} = \frac{1}{2} \times \frac{dx}{x-(1/4)} \tag{12}$$

を経由してこの微分方程式を解く．対数関数を用いて両辺を不定積分することは，$x-(1/4)=e^s$, $y-(1/2)=e^t$ となるような新しい変数 s, t を導入することに当たる．このとき全微分方程式 (12) は $dt = \frac{1}{2}ds$ となり，定数差を除いて $t = s/2$ が導かれる．図式化して書くと

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{(1/2)\text{ 倍}} & t \\ \exp\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\exp \\ x-(1/4) & \xrightarrow[\sqrt{\ }]{} & y-(1/2) \end{array}$$

となる．平方根という四則演算を超えた関数は，指数関数という超越的な関数で共役をとると，(1/2) 倍という簡単な関数になる．

4. 5 次方程式

5 次方程式 (3) に戻り，前節と同じ計算をする．

$$y' = \frac{1}{1-5y^4},$$

$$y'' = \frac{20y^3}{(1-5y^4)^3},$$

$$y''' = \frac{60y^2(1+15y^4)}{(1-5y^4)^5},$$

$$y'''' = \frac{120y(1+90y^4+525y^8)}{(1-5y^4)^7}.$$

これらを微分方程式

$$\sum_{i=0}^{4} p_i(x) y^{(i)} = 0 \tag{13}$$

に代入し，分母を払って $y-y^5-x$ で割り算し，係数を拾い出した 5 元 5 連立 1 次方程式を解くと，

$$p_4(x) = 5x^4 - \frac{256}{625},$$

$$p_3(x) = 50x^3,$$
$$p_2(x) = 117x^2,$$
$$p_1(x) = 51x,$$
$$p_0(x) = -\frac{231}{125}$$

となる．オイラー作用素 $\vartheta = x\,d/dx$ を用いると，微分方程式 (13) は

$$5\left(\vartheta + \frac{11}{5}\right)\left(\vartheta + \frac{7}{5}\right)\left(\vartheta + \frac{3}{5}\right)\left(\vartheta - \frac{1}{5}\right)y - \frac{256}{625}y'''' = 0 \qquad (14)$$

と書き換えられる．級数表示 $y = \sum a_n x^n$ を代入すると，2 項漸化式

$$5\left(n + \frac{11}{5}\right)\left(n + \frac{7}{5}\right)\left(n + \frac{3}{5}\right)\left(n - \frac{1}{5}\right)a_n = \frac{256}{625}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4}$$

が得られる．a_1 から始まる 4 項ごとの関係式なので，$n = 4m+1$ と書き換えると

$$a_{4m+5} = \frac{5(5m+4)(5m+3)(5m+2)(5m+1)}{(4m+5)(4m+4)(4m+3)(4m+2)}a_{4m+1} \qquad (15)$$

となる．$a_1 = 1$ から始めてこれを解くと

$$a_{4m+1} = \frac{(5m)!}{(4m+1)!m!} \quad (m \geq 0) \qquad (16)$$

を得る．これを代入した

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(5m)!}{(4m+1)!m!}x^{4m+1} \qquad (17)$$

が，1 節の最後に登場した級数の係数の正体である．収束半径の範囲内では，5 次方程式 (3) の一つの解 y が，方程式の係数 x の整数倍と無限和で書けたことになる．ガロア理論は四則演算とベキ根を有限回用いて書けないことを保証しているだけなので，当然，互いに矛盾しない．

5. 一般超幾何関数

漸化式 (15) の解を (16) とは少し異なった形で書いてみよう．漸化式 (15) は

$$a_{4m+5} = \frac{5^5}{4^4}\frac{(m+\frac{4}{5})(m+\frac{3}{5})(m+\frac{2}{5})(m+\frac{1}{5})}{(m+\frac{5}{4})(m+1)(m+\frac{3}{4})(m+\frac{1}{2})}a_{4m+1} \qquad (18)$$

と書ける．ここで，このような漸化式の解を表すのに便利な記号（**ポホハマ・シンボル**）

$$(c)_n = \underbrace{c(c+1)\cdots(c+n-1)}_{n\text{ 個}}$$

を導入する．漸化式

$$a_{n+1} = (n+c)a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

の解は，この記号を用いると

$$a_n = (c)_n a_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と書ける．したがって，漸化式 (18) の解は

$$a_{4m+1} = \left(\frac{5^5}{4^4}\right)^m \frac{(\frac{4}{5})_m(\frac{3}{5})_m(\frac{2}{5})_m(\frac{1}{5})_m}{(\frac{5}{4})_m(1)_m(\frac{3}{4})_m(\frac{1}{2})_m}$$

と書ける．このような形の級数の母関数として，**一般超幾何級数** ${}_pF_{p-1}$ を

$${}_pF_{p-1}\left(\begin{array}{c} \alpha_1, \cdots, \alpha_p \\ \beta_1, \cdots, \beta_{p-1} \end{array} \middle| \, x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_{p-1})_n n!}x^n$$

と定める．$p = 1$ の場合は幾何級数

$${}_1F_0\left(\alpha \middle| \, x\right) = (1-x)^{-\alpha},$$

であり，$p = 2$ の場合はガウスの超幾何級数である．この記号を用いると，前節で得られた級数解 $\sum a_{4m+1}x^{4m+1}$ は，

$$y = x\ {}_4F_3\left(\begin{array}{c} \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \\ \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \end{array} \middle| \, \frac{3125}{256}x^4\right) \qquad (19)$$

と書くことができる．

一般超幾何関数 $u = {}_pF_{p-1}$ は p 階の線形常微分方程式

$$x\prod_{i=1}^{p}(\vartheta + \alpha_i)u = \prod_{i=1}^{p}(\vartheta + \beta_i - 1)u \qquad (20)$$

を満たす．ここで $\beta_p=1$ と置いた．微分方程式 (20) の特異点は $x=0,1,\infty$ の3点である．したがって，原点での級数解 ${}_pF_{p-1}(\dots|x)$ の収束半径は1（以上）である．例えば，級数解 (19) の収束半径は $4/5\sqrt[4]{5}=0.53\dots$ であり，図1の点線が始まるところと合致している．

4階の線形微分方程式 (14) の解は4次元線形空間をなす．x^1 から始まる級数解 (19) を y_1 と書く．x^i から始まる解 y_i $(i=0,2,3)$ も

$$y_0={}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{11}{20},\frac{7}{20},\frac{3}{20},-\frac{1}{20}\\ \frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\end{matrix}\middle|\frac{3125}{256}x^4\right),$$
$$y_2=x^2\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{21}{20},\frac{17}{20},\frac{13}{20},\frac{9}{20}\\ \frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{3}{4}\end{matrix}\middle|\frac{3125}{256}x^4\right),$$
$$y_3=x^3\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{13}{10},\frac{11}{10},\frac{9}{10},\frac{7}{10}\\ \frac{7}{4},\frac{3}{2},\frac{5}{4}\end{matrix}\middle|\frac{3125}{256}x^4\right)$$

のように一般超幾何級数で書ける．これは関係式 $\vartheta(x^\lambda u)=x^\lambda(\vartheta+\lambda)u$ だけを用いて示される．パラメータが複雑に見えるが，$\beta_4=1$ を補って考えると，y_i の α や β は y_1 のものに比べてちょうど $(i-1)/4$ だけ大きくなっている．原点の付近では，y_0,y_1,y_2,y_3 が4次元の解空間の基底となる．もとの5次方程式 (3) の解はすべて線形微分方程式 (14) の解になるが，それは5つしかないので，4次元線形空間の元のうち，特別な1次結合のみが5次方程式 (3) の解になっている．実際，$\tilde{y}_0=y_0$, $\tilde{y}_1=-y_1/4$, $\tilde{y}_2=-5y_2/32$, $\tilde{y}_3=-5y_3/32$ と定数倍を調整しておくと，1次結合

$$y=c_0\tilde{y}_0+c_1\tilde{y}_1+c_2\tilde{y}_2+c_3\tilde{y}_3$$

が5次方程式 (3) を満たすための必要十分条件は原点でのベキ級数展開を用いて求められ，

$$\begin{aligned}(c_0,c_1,c_2,c_3)&=(0,-4,0,0),\\ &(1,1,1,1),(-\sqrt{-1},1,\sqrt{-1},-1),\\ &(-1,1,-1,1),(\sqrt{-1},1,-\sqrt{-1},-1)\end{aligned}\quad(21)$$

となる．この5つの解のうち，後ろの4つのものは対称的に見えて，最初のもの $-4\tilde{y}_1=y_1$ だけが孤立して見える．ベキ級数解の収束域を超えて解析接続し，対称性を回復してみよう．

一般のパラメータの一般超幾何関数の微分方程式 (20) に戻る．特異点 $x=0,1,\infty$ は3点とも確定特異点である．また，前節と同じようにして，モノドロミー表現

$$\rho:\pi_1(\mathbf{C}\setminus\{0,1\},*)\to GL(p,\mathbf{C})$$

が定義される．特異点の周りを一周する道に対応する元を**局所モノドロミー**行列と言う．特性指数の間に整数差がなければ，局所モノドロミー行列は半単純（つまり対角化可能）であり，その固有値は特性指数 c を用いて $\exp(2\pi\sqrt{-1}c)$ と書ける．一般超幾何微分方程式は剛（**rigid**）なので，これらのデータから（大域的な）モノドロミー表現 ρ が決まる．特異点 $x=0,1,\infty$ の周りを正の方向へ一周する道を $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_\infty$ とする．微分方程式 (20) より，$x=0$ での特性指数が $1-\beta_i$ $(i=1,\dots,p)$ であり，$x=\infty$ での特性指数が α_i $(i=1,\dots,p)$ であることが直ちに見て取れる．$x=1$ での特性指数は $0,1,\dots,p-2$ と $\delta=\sum_{i=1}^{p-1}\beta_i-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i$ である．これらをまとめ書きしたものを**リーマンスキーム**と呼ぶ．

原点を回る局所モノドロミー行列 $\rho(\gamma_0)$ は固有値 $-\sqrt{-1},1,\sqrt{-1},-1$ を持つので，4次元の解空間の適当な基底を選んで，

$$\rho(\gamma_0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&\sqrt{-1}&0\\0&0&0&\sqrt{-1}\end{bmatrix}$$

としてよい．$\rho(\gamma_1)$ の固有値が $1,1,1,-1$ であること，$\rho(\gamma_\infty)$ の固有多項式が $\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1$ となること，および，基本群の間の関係式 $\rho(\gamma_\infty)^{-1}=\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_0)$ を用いると，対角行列による共役の自由度を除いて，モノドロミー ρ が一意的に決まる：

$$\rho(\gamma_1)=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&5&5&5\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{bmatrix}.$$

ここまではリーマンスキームの情報だけで，解の

具体形を用いていない．実際は，$\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$ が $\rho(\gamma_0)$ の固有ベクトルであり，

$$\rho(\gamma_\infty)^i\ {}^t(0,-4,0,0) \quad (i=0,1,\ldots,4)$$

が，(21) の 5 つの解である．上で与えた ρ の像は 5 次対称群と同型な群になる．

一般超幾何のような**フックス型**微分方程式は特異点の周りに多くの情報を持っている．微分方程式の特異点は解の多価性を生み出し，モノドロミーは一価性からのずれを表している．ずれることは不具合のように思えるが，上で見たように多価性が対称性を獲得するのに用いられている．

6. 補足

なお，一般の 5 次方程式

$$z^5 + b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = 0$$

は適当なチルンハウス変換

$$x = c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \qquad (22)$$

によって，冒頭の 5 次方程式 (1) に変換することができる．変換 (22) の係数 c_i や変換後の方程式 (1) の係数 a は元の方程式の係数 b_j たちの四則演算と冪根で書ける．三項型の n 次方程式

$$x = y - y^n \qquad (23)$$

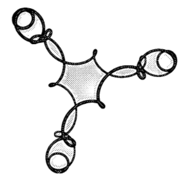
でも，前節の議論と同じようにして，解 y は一般超幾何級数 ${}_{n-1}F_{n-2}$ を用いて表示できる．ただし，$n(\geq 6)$ 次方程式は一般には四則演算と冪根で三項型方程式 (23) に帰着することはできない．

参考文献

1) 原岡喜重『超幾何関数』すうがくの風景 **7** 朝倉書店，2002.
2) Solving the quintic with mathematica, ポスター，Wolfram Research, 1994.

（おちあい・ひろゆき，九州大学大学院数理学研究院）

行列と微分方程式



加藤　晃史

自然を微分方程式で記述することの有効性は古典力学の成功で揺るぎないものとなったが，古典力学が量子力学に取って代わられた20世紀以降でもその有効性が損なわれるどころか，より重要性が高まってきているように思われる．その背景には何があるのだろうか？

今回，行列と微分方程式というテーマを頂いたのを機に，特にどういう側面が数理物理で活用されてきたか，基礎概念を復習しつつ，なるべく具体例に即して眺めてみたい．ただし，紙数の関係で常微分方程式のみを扱い，また取り上げる題材も私の趣味に偏っていることをあらかじめお断りしておく．

1. 行列の指数関数と微分方程式

定数 a に対し，未知関数 $x(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t), \quad x(0) = 1 \tag{1}$$

の解は指数関数 $x(t) = e^{ta}$ で与えられる．実際，指数関数を Taylor 級数

$$e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^n \tag{2}$$

で定義すると，項別微分により $\frac{d}{dt}e^{ta} = ae^{ta} = e^{ta}a$ は容易に確かめられ，微分方程式 (1) の解になっていることがわかる．

Taylor 展開は関数を「多項式」で近似する考え方であり，基本的には和と積が分配法則・結合法則などの通常の性質さえみたせば任意のモノを代入してもそのまま成り立つという利点を持っている（もちろん収束性を気にする必要はあるが）．例えば n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{C})$ は和や積で閉じているので，Taylor 展開 (2) の a に n 次正方行列 A を代入することができる．この行列の指数関数

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \tag{3}$$

は絶対収束し，項別微分により

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A \tag{4}$$

はもちろん成り立つので，未知行列値関数 $X(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t), \quad X(t) = I \tag{5}$$

の解もまた，「指数関数」(3) で与えられる．

(1) 式は，指数関数 e^{at} が「微分する」という線形作用素に対する固有関数であり，その固有値が a ということを意味している．固有値が数から行列に化けても，微分が指数関数である種「対角化」されているというのは興味深い．

2. 逐次近似と反復積分

x を未知数とする一次方程式

$$x = 1 + ax \tag{6}$$

の解はもちろん $x = 1/(1-a)$ であるが，この答を知らないフリをして次のように考えてみよう．もし x が (6) の解なら，右辺の x のところに (6) を代入した

$$x = 1 + a(1 + ax)$$

も当然成り立つ．右辺の x のに再度 (6) を代入した

$$x = 1 + a(1 + a(1 + ax))$$

もまた成り立つ．これを無限に繰り返すと，

$$x = 1 + a(1 + a(1 + a(1 + a(1 + a(1 + \cdots)))))$$

という式が得られる．もともと右辺にあった x は無限の彼方に遠ざかって見えない．右辺を展開すると

$$x = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \cdots$$

となり，これは真の解 $x = 1/(1-a)$ の $a = 0$ における Taylor 展開に他ならない．級数の収束円盤 $|a| < 1$ の内部では絶対収束し，上で行った怪しげな操作は実は正当化できる．$1-a$ による「わり算」は，加減乗のみを持つ環にはない演算だが，無限を許せば $1+a+a^2+\cdots$ という無限級数で表せるのが興味深い．自己を見つめ直すことを無限に繰り返した果てに得られた真の解に，悟りを啓いた賢者に対するような畏敬の念を抱くのは私だけではあるまい．

先に定数係数線形微分方程式の解が行列の指数関数で与えられることを見たが，今度は係数行列が t に依存する線形常微分方程式

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t), \quad X(0) = I \tag{7}$$

を考えてみよう．(7) の両辺を 0 から t まで積分すれば，この問題が積分方程式

$$X(t) = I + \int_0^t A(t_1)X(t_1)dt_1 \tag{8}$$

の解を求めることと同値であることがわかる．

積分方程式 (8) を一次方程式 (6) の類似とみて，先ほどと同様に反復代入で解くことを試みよう．以下，簡単のため $t > 0$ と仮定する．右辺の被積分関数 $X(t_1)$ に (8) 自身を代入すると

$$X(t) = I + \int_0^t A(t_1)\Big(I + \int_0^{t_1} A(t_2)X(t_2)dt_2\Big)dt_1$$

となる．右辺の被積分関数 $X(t_2)$ に (8) を再び代入すると

$$\begin{aligned} X(t) = I + \int_0^t A(t_1)\Big(I + \int_0^{t_1} A(t_2)\Big(I \\ + \int_0^{t_2} A(t_3)X(t_3)dt_3\Big)dt_2\Big)dt_1 \end{aligned}$$

となる．こうした操作を無限に繰り返すと，

$$\begin{aligned} X(t) = I + \int_0^t A(t_1)\Big(I + \int_0^{t_1} A(t_2)\Big(I + \int_0^{t_2} A(t_3)\Big(\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \Big)dt_3\Big)dt_2\Big)dt_1 \end{aligned}$$

という式を得る．構成から明らかなように，積分変数の動ける範囲はより内側に位置するものほど狭く，$t > t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > 0$ となっている．また，行列の積も $A(t_i)$ は $A(t_{i+1})$ の左隣に来る順序で並んでいる．以上に注意しつつ右辺を展開すると，

$$\begin{aligned} X(t) &= I \\ &+ \int_0^t A(t_1)dt_1 \\ &+ \int_0^t \Big[\int_0^{t_1} A(t_1)A(t_2)dt_2\Big]dt_1 \\ &+ \int_0^t \Big[\int_0^{t_1} \Big[\int_0^{t_2} A(t_1)A(t_2)A(t_3)dt_3\Big]dt_2\Big]dt_1 \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

という表式を得る．実はこの無限級数は一様に収束し，初期条件 $X(0) = I$ を満たす常微分方程式 (7) の解を与えることが証明できる．自己を省みることがいかに重要か，つくづく思い知らされる．

微分方程式の解の一意性から，$A(t)$ が t に依存しない定数行列の場合，反復代入で得た解 (9) と行列の指数関数 $X(t) = e^{tA}$ は一致するはずである．しかし，上の表式ではそれは明らかでない．

そこで，**時間順序積**（time-ordered product）[*1] という仕組みを導入しよう．いま，変数 t に依存する行列 $X(t), Y(t)$ に対し，それらの時間順序積を

$$T[X(s)Y(t)] = \begin{cases} X(s)Y(t), & s > t \text{ のとき}, \\ Y(t)X(s), & s < t \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する．すなわち，各行列はそれぞれ『時刻』を割り振られていて，時間順序積 $T[\cdots]$ においては，表式 $\cdots$ での並べ方の如何に関わらず，『過去』のものをより右側へ，『未来』のものをより左側へ置くという取り決めである．行列が 3 つ以上ある場合も同様で，$t_1, t_2, \cdots, t_k$ を並べ替えて $t_{i_k} > \cdots > t_{i_2} > \cdots > t_{i_1}$ とできるとき，行列もこの順序に強制的に並べ替えて

$$\begin{aligned} &T\big[X_1(t_1)X_2(t_2)\cdots X_k(t_k)\big] \\ &= X_{i_k}(t_{i_k})\cdots X_{i_2}(t_{i_2})X_{i_1}(t_{i_1}) \end{aligned}$$

と定義する．

逐次近似解 (9) の k 重積分のところに注目すると，そこに現れる k 個の行列は最初から時間順序で並んでいるので，$T[\cdots]$ をかぶせても良い：

---

*1）似たものとして経路順序積（path-ordered product）あるいは正規順序積（normal-ordered product）と呼ばれるものもあり，定義もほぼ同様である．

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} A(t_1)\cdots A(t_k)dt_k\cdots dt_2dt_1$$
$$= \int\cdots\int_{t>t_k>\cdots>t_2>t_1>0} T\left[A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_k)\right] dt_k\cdots dt_2dt_1.$$

わざわざこのように書く理由は，時間順序の定義により被積分関数 $T\big[A(t_1)\cdots A(t_k)\big]$ は $t_1, t_2, \cdots, t_k$ の入れ替えについて対称になるからだ．これを利用すると，

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\int\cdots\int_{t>t_k>\cdots>t_2>t_1>0} T\big[A(t_{\sigma(1)})A(t_{\sigma(2)})\cdots \cdots A(t_{\sigma(k)})\big]dt_k\cdots dt_2dt_1$$
$$= \frac{1}{k!}\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t T\big[A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_k)\big] dt_k\cdots dt_2dt_1$$
$$= \frac{1}{k!}T\left[\left(\int_0^t A(t_1)dt_1\right)\cdots\left(\int_0^t A(t_k)dt_k\right)\right]$$
$$= \frac{1}{k!}T\left[\left(\int_0^t A(s)ds\right)^k\right]$$

という具合に，積分変数の大小関係が取り払われた形にまとめられる．結局，時間順序積を持ち込むことにより，解 (9) を再び指数関数の形で

$$X(t) = T\left[\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)\right] \tag{10}$$

と，非常にコンパクトに表すことができた．$A(t)$ が定数行列のとき，解が $X(t) = \exp(tA)$ となることは，表式 (10) では一目瞭然である．

ちなみに，行列のサイズが 1×1 で $A(t)$ が普通の関数 $a(t)$ の場合，$a(t)$ と $a(s)$ はもともと可換なので，時間順序積の記号 $T[\cdots]$ は有ってもなくても同じである．このとき $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ の解は

$$\int\frac{dx}{x} = \int a(t)dt \implies x(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$

となり，(10) が変数分離法の自然な拡張（非可換化）にもなっていることがわかる．

$A(t)$ を Hamiltonian 演算子と見なせば，常微分方程式 (7) は Schrödinger 方程式にあたり，初期条件 $X(\tau_0) = I$ をみたす解の $t = \tau_1$ での値

$$U(\tau_1, \tau_0) = T\left[\exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} A(s)ds\right)\right]$$

は，時間発展を記述する演算子と見なせる．微分方程式の解の一意性から，時間発展の演算子 $U(\tau_1,\tau_0)$, $U(\tau_2,\tau_1)$, $U(\tau_2,\tau_0)$ の間には

$$U(\tau_2,\tau_0) = U(\tau_2,\tau_1)\circ U(\tau_1,\tau_0) \quad (\tau_2>\tau_1>\tau_0)$$

という関係が成り立つ*2)．すなわち時間順序積の間には

$$T\left[\exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1+\tau_2} A(s)ds\right)\right]$$
$$= T\left[\exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} A(s)ds\right)\right]T\left[\exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} A(s)ds\right)\right]$$

という関係が成り立つ．両辺を $A(s)$ について展開し，各次数ごとの等式と見なしたものはシャッフル関係式と呼ばれ，多重ゼータ関数の特殊値の性質を調べる重要な武器となっている．

常微分方程式の独立変数 t は普通 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ 上を動くが，これが一般の多様体の上を動けるように拡張したものが接続と呼ばれる概念である．常微分方程式の解の一意性により，接続は多様体の上の曲線に沿った平行移動を定義する．(10) のような時間順序積を用いた表示は，ホロノミーやモノドロミーを解析するための極めて有効な手段を与える．微分方程式の解を反復積分で表す方法は，場の理論では摂動展開（Feynman diagram の方法）という形に拡張・整備され，様々な場面で利用されている．

3. Lax 方程式とその解法

任意の初期条件に対する解が求められる力学系——完全可積分系——は，数理物理において非常に重要な位置を占めるが，数理物理と直接関係のない対象が実は完全可積分系の構造を持ったりすることも多々あり，その射程は謎に包まれている．

可積分系において極めて重要な微分方程式に，いわゆる **Lax 方程式**

$$\frac{dL}{dt} = [B, L] = BL - LB \tag{11}$$

がある．ここに，L, B は時刻 t に依存する正方行列で，その行列要素（の一部）が考えている力学系の位置や速度と解釈される．例えば，有名な戸田方程式

$$\frac{d^2Q_i}{dt^2} = e^{-(Q_i-Q_{i-1})} - e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} \tag{12}$$

は，変数変換 $a_i = \frac{1}{2}e^{-(Q_i-Q_{i-1})/2}$, $b_i = \dot{Q}_i$ を行うと，次の行列に対する Lax 方程式 (11) と等価であることが簡単に確かめられる：

*2) これは量子力学における因果律にあたる．

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & & & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & 0 & -a_2 & \ddots & & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} & 0 \\ 0 & & & \ddots & a_{n-2} & 0 & -a_{n-1} \\ -a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lax 形式で書かれることの御利益は何だろうか？ 一般に，力学系の保存量を求めることは大変難しい問題である――そもそも存在しないかも知れない．ところが，運動方程式が Lax 形式で書かれると，$L(t)$ の固有値が保存量であること――**スペクトル保存変形**と呼ばれる性質――が容易に証明できるのである．

それを見るには，量子力学における Schrödinger 描像と Heisenberg 描像の関係を思い出せばよい．Lax 方程式 (11) は，B を Hamiltonian とする Heisenberg の運動方程式の形をしている．一方 Schrödinger 描像では，状態の変化は状態ベクトルに作用する時間推進の作用素 $U(t)$ で $|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle$ のように記述され，$U(t)$ は Schrödinger 方程式の基本解

$$\frac{dU(t)}{dt} = B(t)U(t), \quad U(0) = I \tag{13}$$

として特徴づけられる．Heisenberg 描像におけるオペレータ L の時間発展も，同じ $U(t)$ を用いて

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1} \tag{14}$$

と書かれるというのは量子力学の基本である．実際，(14) を t で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t) &= \frac{d}{dt}\left(U(t)L(0)U(t)^{-1}\right) \\ &= \frac{dU(t)}{dt}L(0)U(t)^{-1} + U(t)L(0)\frac{dU(t)^{-1}}{dt} \\ &= B(t)U(t)L(0)U(t)^{-1} - U(t)L(0)U(t)^{-1}B(t) \\ &= B(t)L(t) - L(t)B(t) = [B(t), L(t)] \end{aligned}$$

となり，(14) で定義した $L(t)$ が Heisenberg の運動方程式の解であることが確かめられる．ただし，変形の途中で

$$\frac{dU^{-1}}{dt} = -U^{-1}\frac{dU}{dt}U^{-1} = -U^{-1}BUU^{-1} = -U^{-1}B$$

となることを使った．

(14) のような共役変換（随伴作用，基底の取り替え）の下で特性多項式や固有値や不変であることは線形代数で学んだとおりだ．従って L の固有値は不変であり，それらの対称多項式である

$$P_k := \operatorname{Tr} L^k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{15}$$

はすべて保存量である．系が完全可積分であることは，自由度と同じ数の独立な保存量を構成することで示されるが，Lax 表示があると，(15) のように極めて具体的な式で保存量を量産できる利点がある．

ところで，戸田方程式の Lax 形式に現れる L と B とは無関係ではなく，L が分かれば B が作れる．実際，

$$B_{ij} = \begin{cases} +L_{ij} & (i \equiv j+1 \pmod{n}), \\ -L_{ij} & (i \equiv j-1 \pmod{n}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおけばよい．この対応（射影）を $B = p(L)$ と書くことにすると，Lax 方程式は L 自身の非線形な自励方程式 $\frac{dL}{dt} = [p(L), L]$ の形に表される．Adler, Kostant, Symes らは，このように書かれる Lax 方程式を非常に一般的な枠組みで考察し，今日 AKS の方法と呼ばれる解法を確立した．それを述べるためには Lie 群・Lie 環の言葉が便利である．G を Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする．$B(t) \in \mathfrak{g}$ が与えられたとき，Lax 方程式は $\frac{dL}{dt} = [B, L]$ という常微分方程式であると言える．

いま，$G_1, G_2 \subset G$ を Lie 部分群とし，Lie 群の分解

$$G = G_1G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \{1\} \tag{16}$$

成り立つと仮定する．すなわち任意の $g \in G$ は，ある $g_1 \in G_1$ と $g_2 \in G_2$ を用いて $g = g_1g_2$ と一意的に表されるものとする*3)．この分解を単位元 1 の近傍で考えれば，Lie 環も $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ と直和に分解される．$p_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ を対応する射影とする．以上の設定の下で，彼らは

$$\frac{dL}{dt} = [p_2(L), L], \quad L(0) = L_0 \tag{17}$$

*3) 集合としては直積 $G = G_1 \times G_2$ だが，群としては必ずしも直積でないことに注意．例えば LU 分解（$G = GL_n$, $G_1 = \{$ 下三角行列全体$\}$, $G_2 = U(n)$）などを念頭に置いている．

という初期値問題を考察した．彼らの解法は次のようにまとめられる：

定理 1 Lax 方程式 (17) は次の手順で解ける．
(i) $g(t) = e^{tL_0}$ とおく．
(ii) この $g(t)$ を分解 (16) に応じて $g(t) = g_1(t)g_2(t)$ $(g_i(t) \in G_i)$ と表す．
(iii) $L(t) = g_2(t)L_0 g_2(t)^{-1}$ が求める解である．

AKS の主張を確かめるには，(iii) で与えた $L(t)$ が微分方程式 (17) をみたすことを確かめればよい．$L(t)$ の時間微分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &= \frac{d}{dt}(g_2(t)L_0g_2(t)^{-1}) \\ &= \left(\frac{d}{dt}g_2\right)L_0g_2^{-1} + g_2L_0\left(\frac{d}{dt}g_2^{-1}\right) \\ &= \dot{g}_2L_0g_2^{-1} - g_2L_0g_2^{-1}\dot{g}_2g_2^{-1} \\ &= \dot{g}_2g_2^{-1}\left(g_2L_0g_2^{-1}\right) - \left(g_2L_0g_2^{-1}\right)\dot{g}_2g_2^{-1} \\ &= \dot{g}_2g_2^{-1}L(t) - L(t)\dot{g}_2g_2^{-1} \\ &= [\dot{g}_2g_2^{-1}, L(t)]\end{aligned}$$

と表される．従ってあとは $\dot{g}_2g_2^{-1} = p_2(L(t))$ であることを確かめればよい．出発点としてとった運動が $g(t) = e^{tL_0}$ であったから

$$\begin{aligned}L_0 &= g^{-1}\frac{d}{dt}g = (g_1g_2)^{-1}\frac{d}{dt}(g_1g_2) \\ &= g_2^{-1}g_1^{-1}(\dot{g}_1g_2 + g_1\dot{g}_2)\end{aligned}$$

が成り立ち，その g_2 による共役をとれば

$$\begin{aligned}L(t) &= g_2L_0g_2^{-1} = g_1^{-1}(\dot{g}_1g_2 + g_1\dot{g}_2)g_2^{-1} \\ &= g_1^{-1}\dot{g}_1 + \dot{g}_2g_2^{-1}\end{aligned}$$

となる．明らかに $g_1^{-1}\dot{g}_1 \in \mathfrak{g}_1$, $\dot{g}_2g_2^{-1} \in \mathfrak{g}_2$ であるが，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ は直和であったから

$$p_1(L(t)) = g_1^{-1}\dot{g}_1, \quad p_2(L(t)) = g_2\dot{g}_2^{-1}$$

でなければならず，主張が示された．非自明な解が，$g(t) = e^{tL_0}$ という単純な解を『分解』しただけで得られるというのは何だか手品を見るようである．

いわゆる佐藤理論は，無限次元グラスマン多様体を用いて分解の仕方を普遍的に記述すると言う意味で，AKS の方法を究極まで進めた理論とも見ることができる．

4. Picard–Fuchs 微分方程式

代数多様体の周期がみたす微分方程式もまた，近年の数理物理でしばしば登場する重要な方程式である．ここでは**楕円曲線**の場合を例に取り上げよう．

λ をパラメータとし，3 次曲線

$$F(x,y) = y^2 - x(x-1)(x-\lambda) \tag{18}$$

を考えよう．この代数曲線が表す Riemann 面は，複素 x 平面で $0, 1, \lambda, \infty$ で分岐する 2 重被覆として実現され，無限遠点を付け加えてコンパクト化すると，位相的には 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ と同相な楕円曲線 E_λ が得られる．

いま仮に，我々は楕円曲線の定義方程式 (18) を知らないとし，楕円曲線の形を「観測」によって決定する必要に迫られたとしよう．そもそも我々は何を観測できるのだろうか？

思考実験をしよう．(x,y) を，ある 1 自由度力学系の相空間の位置 x と運動量（速度）y の座標と考えてみよう．すなわち $dx \wedge dy$ をシンプレクティック形式とする複素シンプレクティック空間 $T^*\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2$ の正準座標であると見なす．このとき相空間 $T^*\mathbb{C}$ 上の関数である $F(x,y)$ を Hamiltonian と見なせば，y^2 が運動エネルギー，$-x(x-1)(x-\lambda)$ が位置エネルギーを表す．F が生成する Hamiltonian flow は (x,y) 平面内のベクトル場（＝1 階連立微分方程式）

$$\begin{cases}\dot{x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2(\lambda+1)x + \lambda\end{cases} \tag{19}$$

で表される．F 自身は flow の保存量であり，初期値 $F=0$ で出発した解曲線は $F=0$ に留まる．つまり，楕円曲線 E_λ は Hamilton 系 (19) の解曲線と見なすことができる．

しかし，この Hamilton 系の運動が非常にミクロなものであって，t の関数として $x(t), y(t)$ を時々刻々測定することが事実上不可能であるとしたらどうだろうか？ このような場合でも，ちょうど水素原子のスペクトルのように，1 秒間に何回振動するかといったこと——運動の周期——は測定可能であるとしてよいだろう．

運動 $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ の周期とは $\gamma(t) = \gamma(t+\varpi)$ $(\forall t)$ となる最小の時間 ϖ のことであった．周期は，解曲線 γ に沿って「所要時間＝距離/速さ」を積分したものなので，いまの場合それは

$$\varpi = \oint_\gamma \frac{dx}{y}$$

という線積分で与えられる．この周期積分に現れた微分形式 $\omega = \frac{dx}{y}$ は E_λ の canonical differential form とも呼ばれ，数学的にも非常に由緒正しいものである．より詳しくみると，周期運動は必ず x 平面上の 2 つの分岐点 x_0, x_1 を結ぶ経路上の往復運動の形をしており*4)，周期運動を表す $T^*\mathbb{C}$ 内の閉曲線 $\gamma \simeq S^1$ は端点で分岐する 2 重被覆の形をしているから，周期積分は

$$\varpi = \oint_\gamma \frac{dx}{y} = 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}$$

と表される．

E_λ が位相的にはトーラス T^2 であるため，基本的な周期運動としては，$H_1(E_\lambda, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$ の基底に対応する 2 つの周期解 γ_1, γ_2 が存在し，それらを例えば $[0, \lambda]$ 上の往復運動と $[0, 1]$ 上の往復運動に選ぶことができる：

$$\varpi_1 = 2\int_0^\lambda \frac{dx}{y}, \quad \varpi_2 = 2\int_0^1 \frac{dx}{y}$$

任意の周期は $n_1\varpi_1 + n_2\varpi_2$ $(n_1, n_2 \in \mathbb{Z})$ という形で表されることがわかる．

以上の思考実験をまとめると，楕円曲線 E_λ の定義方程式 (18) は測定できなくても，**周期の格子**

$$\Lambda = \mathbb{Z}\varpi_1 + \mathbb{Z}\varpi_2 \tag{20}$$

は測定可能であり，同型 $E_\lambda \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ を通じて楕円曲線 E_λ の「形」が観測できることがわかる．周期の格子 Λ が分かると，実はもとの λ もわかるというのが保型関数の理論である．

E_λ 内の線積分において，有理型関数 f から作られる df という微分形式（完全微分，exact differential form）を閉曲線 γ に沿って周回積分すると，その積分値は Stokes の定理から 0 となり，周期には効かない．これらを法として有理型 1 次微分形式を分類したのが de Rham コホモロジー群 $H^1(E_\lambda, \mathbb{C})$ である．

この立場では，周期を求めることは，周期解＝閉曲線と微分形式，ホモロジーとコホモロジーのペアリング

$$\begin{aligned} &H_1(E_\lambda, \mathbb{Z}) \times H^1(E_\lambda, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \\ &([\gamma], [\omega]) \mapsto \int_\gamma \omega \end{aligned} \tag{21}$$

と見ることができる．$H^1(E_\lambda, \mathbb{C})$ の元を特に $\omega = \frac{dx}{y}$ に限定した場合，(21) は自然な埋め込み

$$\iota_\lambda : H_1(E_\lambda, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbb{C}^2$$

を与え，その像が周期の格子 Λ にほかならない．

さて，パラメータ λ を動かして楕円曲線 E_λ が変化すると，周期はどのように変化するだろうか？ 思考実験では，λ が変化すると，それは Hamiltonian flow の変化を引き起こす．良く知られているように常微分方程式の解の挙動はパラメータの変化に対して連続である．もし λ のときに周期解 γ_λ が存在するなら，λ を少し動かして λ' としても，周期解がいきなり消失することはなく，γ_λ とホモトピックな周期解 $\gamma_{\lambda'}$ が存在する．つまり λ の動きとうまく連動したサイクルの族 γ_λ が局所的にとれて，λ の関数としての周期積分

$$\varpi(\lambda) = \oint_{\gamma_\lambda} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}$$

が考えられる．このとき λ について積分記号下の微分が許され，特に $\varpi(\lambda)$ が λ の正則関数であることがわかる．

では $\varpi(\lambda)$ は「具体的」にはどのような関数なのだろうか？ Picard, Fuchs らは，周期 $\varpi(\lambda)$ の変化を微分方程式で記述しようと考えた．

周期は $\lambda = 0, 1, \infty$ に特異点を持つことはすぐに分かる．そこで $B = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ とおき，楕円曲線族 $\bigcup_{\lambda \in B} E_\lambda$ を，B を底空間としファイバーが楕円曲線であるような複素曲面と見なす．周期 $\varpi(\lambda)$ は，ω をファイバー E_λ 内のサイクル γ で積分した結果得られた B 上の（多価正則）関数と見なせる．

$H^1(E_\lambda, \mathbb{C})$ は 2 次元であってその基底として，例えば $[\frac{dx}{y}]$ と $[\frac{xdx}{y}]$ が取れることが知られている．従って，3 つのコホモロジー類 $[\omega]$, $[\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}]$, $[\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda^2}]$ を考えると，それらは線形独立ではあり得ず，ある非自明な線形関係式

$$c_0(\lambda)\,[\omega] + c_1(\lambda)\left[\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}\right] + c_2(\lambda)\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda^2}\right] = 0$$

をみたす．これとサイクル γ とのペアリングをとり，積分記号下の微分の議論を行うと

$$\left(c_0(\lambda) + c_1(\lambda)\frac{d}{d\lambda} + c_2(\lambda)\frac{d^2}{d\lambda^2}\right)\oint_\gamma \omega = 0$$

という式を得る．これはまさに周期がみたす微分方程式である．

*4）普通の解析力学の文脈では時間も座標も実数であるが，今の文脈では複素で考えており，必ずしも解軌道の実軸への制限が周期関数になるわけではないことに注意．

具体的に計算してみよう．$y=\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{y}=\frac{1}{2\lambda(\lambda-1)}\frac{x-\lambda}{y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x^2}{\lambda(\lambda-1)y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{x}{y}=\frac{1}{2(\lambda-1)}\frac{x-1}{y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x^2}{(\lambda-1)y}\right)$$

となることは簡単な計算で確かめられる．これより，微分形式 $\frac{dx}{y}$ と $\frac{xdx}{y}$ は

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}\frac{dx}{y}\\ \frac{xdx}{y}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\lambda(\lambda-1)}\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -\lambda & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx}{y}\\ \frac{xdx}{y}\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}(\cdots)$$

という関係にあることがわかる．ただし，右辺の最後の項はファイバー方向で見ると完全微分なので，周期積分には効かない．つまり，λ を動かしたときに，$H^1(E_\lambda,\mathbb{C})$ の基底は

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}[\frac{dx}{y}]\\ [\frac{xdx}{y}]\end{pmatrix}=\frac{1}{2\lambda(\lambda-1)}\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -\lambda & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[\frac{dx}{y}]\\ [\frac{xdx}{y}]\end{pmatrix}$$

という微分方程式に従って動くことが結論される．従って，サイクル γ を任意に選んだとき，積分

$$\varpi(\lambda):=\int_\gamma\frac{dx}{y},\quad \varphi(\lambda):=\int_\gamma\frac{xdx}{y}$$

は連立微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{d\varpi}{d\lambda}=\dfrac{-1}{2(\lambda-1)}\varpi+\dfrac{1}{2\lambda(\lambda-1)}\varphi,\\[2mm] \dfrac{d\varphi}{d\lambda}=\dfrac{-1}{2(\lambda-1)}\varpi+\dfrac{1}{2(\lambda-1)}\varphi\end{cases}$$

をみたす．これから φ を消去すると，周期 ϖ に関する単独 2 階線形微分方程式

$$\left[\lambda(1-\lambda)\frac{d^2}{d\lambda^2}+(1-2\lambda)\frac{d}{d\lambda}-\frac{1}{4}\right]\varpi(\lambda)=0$$

を得る．これが楕円曲線 (18) に対する Picard–Fuchs の微分方程式の具体形である．この方程式は，微分方程式の教科書を開けば必ず目にする **Gauss の超幾何微分方程式**

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+(c-(a+b+1)z)\frac{dw}{dz}-abw=0$$

で $a=b=\frac{1}{2}, c=1$ とおいたものになっている．

サイクル γ として，特に分岐点 $x=0,\lambda$ をつなぐ往復運動をとろう．これは $\lambda\to 0$ のときに周期 $\varpi(\lambda)$ が発散しない唯一のサイクルで，その極限値は

$$\lim_{\lambda\to 0}\varpi(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\oint_\gamma\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$
$$=\mathrm{Res}_{x=0}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=2\pi i(-i)=2\pi$$

で与えられる[*5]．一方，Gauss の超幾何微分方程式の原点で正則な解は，超幾何級数

$$F(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$$

の定数倍で与えられる．すると，γ の周期は，λ の関数として

$$\varpi(\lambda)=2\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2\lambda^n$$
$$=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2\lambda^n$$

と極めて具体的な表式で表されることがわかった．

楕円曲線の周期がみたす微分方程式は，ミラー対称性や Seiberg–Witten 理論などで本質的に用いられているが，整数論的にも応用があり，周期積分の深さの一端を物語っている．

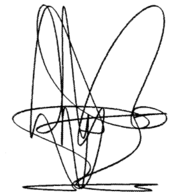
5. おわりに

場の理論の双対性を微分方程式のモノドロミーの作用として理解しようという見方は非常に有益で，現在も活発に研究が行われている．ここでは取り上げられなかったが，instanton や Knizhnik–Zamolodchikov 方程式なども非常に興味深い偏方程式系であり，応用も広い．繋がり方や変化の仕方を知りたい対象は，従来の「質点の位置」にとどまらず，「場」，「真空」，「周期」，「図形の形」などますます拡がっている．これらを微分方程式を使って記述する方法論は非常に強力であり，今後も多くの新たな発見をもたらしてくれるだろう．

（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

*5) ここで選んだ γ は，有限振幅の振り子の安定平衡点の周りの微小振動にあたり，$\varpi(0)=2\pi$ は振り子の等時性として知られる．

数論と方程式



伊 吹 山　知 義

「数論」と「方程式」の関係は多岐にわたり，小文で網羅的に述べることは思いも依らない．即座に思い浮かぶのは**類体論**であるが，これは既存の解説も多いと思うので，ここでは，これを避けて，他のトピックをいくつか散発的に並べてみたい．

1. 19 世紀のガロア理論

ちょっとした研究上のきっかけから，昔の数学者である F. Klein (1849–1925) の初期の著作を調べたことがあった．まだ Hilbert の整数論報告も高木類体論もなかったころの話である．私は数学史は良く知らないので，漠然と，Klein と Poincaré は保型関数論を作った人という程度の認識しかなかったのだが，実際に初期の著作を読んでみて，どうも少しこういう認識とは異質なものを感じた．例えば Klein は次のような群論について，詳しく述べている．p を素数としよう．$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を整数を p で割ったときの余りの数の体系（つまり標数 p の**有限素体**）としよう．また $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ で $\mathbb{F}_p$ を成分とする 2 行 2 列の行列で行列式が 1 のもので，± 1 の違いは同一視したものとしよう．

> **問題**：$PSL_2(\mathbb{F}_p)$ の真部分群の中で，一番大きなもの（極大部分群の中で指数が一番小さいもの）は何か？

答は，$p = 2, 3, 5, 7, 11$ だけ少し特殊で，指数が p のものがある．これ以上になると，指数は $p+1$ になる．

この結果を最初に求めたのは Galois のようである．Klein の興味の理由が最初は良く分からなかったのだが，どうも彼は，最初は保型関数論をやりたかったわけではなくて，保型関数体を**ガロア理論**のモデルにしたかったのだと思うと，良く分かった気がした．Camille Jordan がガロア理論の本を書いたのが 1870 年だそうだから，それから非常に日時がたっていたわけではない．当時の流行りであろうか，Fricke や Weber の代数の本にもこのようなガロア理論が書かれている．数学史的な事情は，私にはあまりよくわからないが，この話から出発してみたい．そのために少し**保型関数**の話を説明しよう．

2. 保型関数

複素上半平面 $H = \{\tau \in \mathbb{C}; Im(\tau) > 0\}$ は非ユークリッド幾何のモデルとしてよく知られている．H には，

$$g\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = 1$$

と特殊線型群 $SL_2(\mathbb{R})$ が作用していて，H 上の距離や面積がこの作用で不変なように定義されている．距離は $(dx^2 + dy^2)/y^2$ で測られている．ここでは，「直線」は，実軸に直交する半円，または虚軸に平行な直線である．与えられた「直線」に対

し，その上にない1点を通る「平行」な「直線」は無限個ある．さて，Γ を $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群で $\Gamma\backslash H$ が面積有限になるものとする（$\Gamma\backslash H$ というのは，Γ で写していったら重なりなく H 全体を覆えるような H の図形を Γ 同値な辺で張り合わせたもの）．実は $\Gamma\backslash H$ は（必要に応じていくつか無限遠点を補うと）コンパクトリーマン面というものになっている．H 上の関数 f で $f(\gamma\tau)=f(\tau)$ がすべての $\gamma\in\Gamma$ について成り立つものを考えたい．ここで f はリーマン面上で有理型なもののみを考え，そのような関数全体の集合を $M(\Gamma)$ と書こう．この $M(\Gamma)$ の元のことを，保型関数と言う．$M(\Gamma)$ は複素数体上の1変数代数関数体 $\mathbb{C}(x,y)$ の形になる．ここで x は $\mathbb{C}$ 上の超越元で，y は $\mathbb{C}(x)$ 上の代数方程式 $f(x,y)=0$ を満たす．最後の代数方程式は，座標が x,y で書ける曲線の方程式とも思える．コンパクトリーマン面，1変数代数関数体，射影代数曲線，の3つは，複素数体上で考える限り，同じものの別の側面を見たに過ぎない．さて，上のような離散群 Γ_1, Γ_2 について，$\Gamma_2\subset\Gamma_1$ で，しかも Γ_2 は Γ_1 の正規部分群と仮定する．このときは $M(\Gamma_2)$ は $M(\Gamma_1)$ の有限次ガロア拡大体であり，そのガロア群は Γ_1/Γ_2 になる．この拡大の方程式を求めたい．

3. 保型関数体

具体的な保型関数の話をするために，具体的な群を導入しよう．$SL_2(\mathbb{Z})$ を整数係数の2次正方行列で行列式が1のものがなす群とする．まず，$M(SL_2(\mathbb{Z}))$ を具体的に求めておこう．そのためには，保型関数だけを考えるのは不自由である．k を整数とし，$SL_2(\mathbb{R})\ni g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の H 上の関数 f への作用を $(f|_k[g])(\tau)=(c\tau+d)^{-k}f(g\tau)$ で定める．領域への作用を少しひねったわけである．H 上および $i\infty$ で正則な関数 $f(\tau)$ が任意の $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$ について，$f|_k[\gamma]=f$ を満たすとき，これを $SL_2(\mathbb{Z})$ のウェイト k の**保型形式**と言う．今 $\tau\in H$ に対して $q=e^{2\pi i\tau}$ と書き，次の関数を定義する．

$$E_4(\tau) = 1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n,$$

$$E_6(\tau) = 1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n,$$

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}.$$

ここで，$\sigma_m(n)=\sum_{d|n}d^m$ という意味である．これらはそれぞれ，ウェイト 4, 6, 12 の保型形式になっている．また，$\Delta(\tau)=(E_4^3-E_6^2)/1728$ である．$SL_2(\mathbb{Z})$ の保型形式全体は環になるが，これは多項式環 $\mathbb{C}[E_4,E_6]$ と等しい．さて，

$$J(\tau)=E_4(\tau)^3/\Delta(\tau)$$

とおくと実は $M(SL_2(\mathbb{Z}))=\mathbb{C}(J(\tau))$ となることが知られている．すなわち $M(SL_2(\mathbb{Z}))$ は一つの超越的な元 $J(\tau)$ の有理関数からなる体である．

次に素数 p に対して次のような群を考える．

$$\Gamma(p)=\{g\in SL_2(\mathbb{Z}); g\equiv 1_2 \bmod p\}.$$

ここで 1_2 は2次の単位行列で，合同は各成分の差が，p で割り切れることを示している．これをレベル p の主合同部分群と言う．$\Gamma(p)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の正規部分群であり，$PSL_2(\mathbb{F}_p)\cong SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm\Gamma(p)\}$ である．では $\mathbb{C}(J)$ のガロア拡大である $M(\Gamma(p))$ はどのような体であろうか？ 実際には保型関数体 $M(\Gamma(p))$ 自身がどのような関数で生成されるかは，良く知られている（cf. Shimura[2] p.134）．しかし，ここではこの拡大を，方程式を用いて書くことを考える．$M(\Gamma(p))$ は $\mathbb{C}(J)$ の単純拡大だからその生成元をとって，それが満たす方程式を与えればよい，という発想をすれば，その方程式の次数はもちろん $\#(PSL_2(\mathbb{F}_p))$ の位数になる．この次数はかなり大きい．しかし，$\mathbb{C}(J)$ 上の方程式を一つ与えてその分解体（つまりその根を全部付け加えて得られる体）として $M(\Gamma(p))$ を実現したいのならば，方程式の次数はもっと小さくなる．実は群 $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ は $p\geq 5$ ならば単純群である．よって，$SL_2(\mathbb{Z})\supset\Gamma\supset\Gamma(p)$ なる群をとって，$\mathbb{C}(J)$ と

$M(\Gamma(p))$ の間にある体 $M(\Gamma)$ を考えると，$M(\Gamma)$ を含む最小のガロア拡大は $M(\Gamma(p))$ のはずである．だから $M(\Gamma)$ の生成元が満たす $\mathbb{C}(J)$ 上の既約方程式の分解体は $M(\Gamma(p))$ である．この方程式の次数は，もちろん $[PSL_2(\mathbb{Z}) : \pm\Gamma/\{\pm 1_2\}]$ である．この方程式の次数をなるべく小さくしたいと思えば，冒頭に上げた問題の解が意味を持つことになる．例えば $p=5$ ならば，この方程式の最小の次数は5のはずである．大昔の数学科の演習で，「一般の**5次方程式**を解け」という問題が出た．「古典的な意味では公式は存在し得ないが，保型関数を使って良いならば話は別だ」という意味だと言われて，びっくりした．Klein はこれについて本を書いているので，詳しくはそちらを参照されたい（cf. Klein[1)]）．さて，p が11以下ならばこのような p 次の方程式が存在するが，$p>11$ ならば，最小次数は $p+1$ のはずである．このような部分群は何だろうか．実は $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分集合 $\Gamma_0(N)$ を (1,2) 成分が N で割れるような元からなるものと定義すると，これは群であり，$N=p$ が素数ならば $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(p)] = p+1$ となるのである．

4. モジュラー方程式

次に，$M(\Gamma_0(p))$ の生成元が満たす方程式は何かという話になる．実は，$M(\Gamma_0(p)) = \mathbb{C}(J(\tau), J(p\tau))$ であることが，比較的簡単にわかるので，$\mathbb{C}(J(\tau))$ の元を係数に持ち，$J(p\tau)$ を根に持つ $p+1$ 次の方程式があるはずである．実際 X を変数として

$$F(X,J) = (X - J(p\tau)) \prod_{b=0}^{p-1} \left(X - J\left(\frac{\tau+b}{p}\right)\right)$$

という $p+1$ 次の多項式を考えると，これは $J(\tau)$ の多項式を係数にもつ X の多項式であり，これが求めたかった式である．これは複雑な多項式で，書き下すのは容易ではない．しかし，いろいろなことが知られている．例えば $F(X,Y) = F(Y,X) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ である．$F(X,X)=0$ という方程式を**モジュラー方程式**と言う．これを用いて（ただし p を一般の自然数 N に一般化したものを用いて），$\mathbb{Q}(\tau)$ が虚2次体のとき，$J(\tau)$ が代数的整数であることが証明される．また

$$F(X,Y) \equiv (X - Y^p)(X^p - Y) \bmod p$$

である．これは**クロネッカーの合同関係式**と言われ，虚2次体上のアーベル拡大を $J(\tau)$ の特殊値やワイヤシュトラスの $\wp$ 関数の等分値で記述するという**虚数乗法論**に登場する．虚数乗法論は「クロネッカーの青春の夢」と呼ばれ，高木類体論の完成とともに証明された．

さて，普通，保型関数の間に成り立つ方程式は，保型関数をうまく選べば代数体の元を係数に持つようにとれる．志村モデルとか志村理論とか呼ばれている理論では，このような代数体上の保形関数体の体系を一斉に与えて，非常に精密なガロア理論やモジュラー曲線のゼータ関数などの算術的理論を展開する（cf. Shimura[2)]）．これは複素数体上で考えるよりも，はるかに精妙で難しい．広く高次元まで含めた**志村多様体**と呼ばれる対象が現在の整数論の大きな対象であり，様々な研究が行われている．

5. 楕円曲線

これまで登場した $J(\tau)$ に関連して，**楕円曲線**の説明をしよう．楕円関数というのは19世紀前半の数学の華であった．三角関数は非常に良い関数なので，Gauss や Abel はこれを拡張しようと考えたそうである．これを考えるのに

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}(x)$$

からの類推で，積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

の逆関数を考えれば良いと着想したとか．このあたりの事情は高木貞治[3)] に詳しい．さて，複素平面の中で，1 と $\tau \in H$ で生成される格子 $L_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ に対し，$\mathbb{C}/L_\tau$ を考えよう．これは $0, 1, \tau, 1+\tau$ を頂点とする平行四辺形を対辺どうし張り合わ

せたものに等しいから浮き袋の表面のような形である．これを楕円曲線と呼ぶ．ここで，$\mathbb{C}/L_\tau$ と $\mathbb{C}/L_{\tau'}$ が正則同型になるための必要十分条件は $J(\tau)=J(\tau')$ である．この意味で $J(\tau)$ を楕円曲線の J 不変量と言う．

実はこの $\mathbb{C}/L_\tau$ の方程式を書くことができる．そのために次の関数を導入する．

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in L_\tau-\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right).$$

これを**ワイヤシュトラスの $\wp$ 関数**と言う．$\wp$ の定義はもちろん τ の取り方によっている．この関数は，定義から明らかなように，$\omega\in L$ ならば $\wp(z+\omega)=\wp(z)$ を満たす．z での微分 $\wp'$ も同様である．よってこれらは，ともに $\mathbb{C}/L_\tau$ 上の関数と思うことができる．もちろん正則ではなく有理型関数であり，L_τ の点は皆，極である．実は $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の間には関係があって，

$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_2(\tau)\wp(z)-g_3(\tau)$$

と書ける．ここで，面白いことに $g_2(\tau)=(2\pi)^4E_4(\tau)/12$, $g_3(\tau)=(2\pi)^6E_6(\tau)/216$ となっている．また，

$$J(\tau)=1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3-27g_3(\tau)^2}$$

という関係式が成り立つ．

$$z=\int\frac{d\wp(z)}{\wp'(z)}=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

であるから，$\wp(z)$ は Gauss や Abel が考えた逆関数に近い．三角関数の周期が 2π だったのに比較して，$\wp(z)$ は 1 と τ の 2 つの周期があるので，2 重周期関数と言われる．さて，上の関係を曲線の方程式だと思って

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

と書くと，$\mathbb{C}/L_\tau$ 上の点とこの曲線上の点は

$$z\to(\wp(z),\wp'(z))$$

という対応で 1 対 1 の対応がついている．ただし，$\wp(z)$, $\wp'(z)$ は有理型だから，無限大になることも

あるので，曲線 $y^2z = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$ 上の点を 2 次射影空間の中で考えた点（比 $(x:y:z)$）の全体との対応というべきである．

以上から考えて，楕円曲線の別の定義を与えることができる．重根を持たない 3 次の多項式 $f(x)$ について，$y^2 = f(x)$ という方程式で決まる射影代数曲線を楕円曲線と呼ぶ．このように方程式だけで書くと，その方程式の係数がどこに入っているか，つまり楕円曲線の定義体は何かということを指定することができる．

> 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E は，E できまる適当な正整数 N について，$\Gamma_0(N)$ できまる保型関数体のヤコービ多様体の「成分」に現れる．

これは**志村–谷山予想**と呼ばれ，A. Wiles などにより証明された．これが**フェルマーの最終定理**の証明に本質的な役割を果たしたのは有名である．

6. 超特異楕円曲線と微分方程式

ここで，**有限体上で考えた微分方程式**が，有用な道具として登場する場合を見てみたい．

楕円曲線を $y^2 = f(x)$ というように複素平面から離れて方程式で書いたら，別に係数を有理数体を含む体で考えなくても $q = p^f$ 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_q$ で考えることもできる．$p = 2, 3$ だと前に書いた表示では，ちょっと困る点もあるので，実際には

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

と書かないといけないのだが，ともかくも，こういう方程式は，a_i が有限体の元のときでも考えられるわけである．この場合でも J 不変量にあたるものが定義され，やはり楕円曲線が閉体上で同型であることと J 不変量が一致することは同じであるようにできる．前に述べた多項式 $F(X, Y)$ も有限体上でも考えられ，$F(X, J) = 0$ を解いて，J で決まる楕円曲線と同種（isogeny）な楕円曲線を求めたりすることもある．

さて，複素数体で考えると楕円曲線上の点は本質的に $\mathbb{C}/L_\tau$ の元だから，足し算ができる．何度か足したらゼロになる点を等分点と言う．これは複素平面内の単位円の円周を 1 からスタートして n 等分したら，各頂点は n 乗すると 1 になる，ということの類似である．$\mathbb{C}/L_\tau$ の n 等分点は n 倍すると L_τ に入る点であるから，$\{(a + b\tau)/n;\ 0 \leq a, b \leq n-1\}$ で代表されている．特に n 等分点は，全部で n^2 個ある．

一方，有限体上でも，やはりこの曲線上の点の足し算を考えることができる．具体的に言うと，まず無限遠点をゼロと指定する．次に，任意の射影直線とこの曲線の交点は（重根を込めて）いつも 3 つあるので，そのような 3 点の和はゼロという条件で和を定義するのである．さて，標数が p の有限体上の楕円曲線 E の p 分点の様子は，標数がゼロのときと非常に異なり，0 以外にないか，p 個あるかのどちらかである（標数がゼロの場合は p^2 個だったから，かなり違う）．0 しかない場合のほうが特殊であって，この場合を**超特異楕円曲線**と言う．これは非常に特殊な，また面白い曲線である．例えば，$\mathbb{C}/L_\tau$ の 0 を固定する解析的自己準同型は，普通は $\mathbb{Z}$（何倍かする写像）しかなく，τ が虚 2 次なら，2 次体 $\mathbb{Q}(\tau)$ の（極大とは限らぬ）整数環になる（いわゆる虚数乗法）．しかし，超特異楕円曲線の自己準同型は，$\mathbb{Z}$ 上 4 次の非可換環（有理数体上の，p のみが分岐する定符号 4 元数環 $B_{p,\infty}$ の極大整数環）になっている．超特異楕円曲線には皆 $\mathbb{F}_{p^2}$ 上定義されたモデルがある．その閉体上の同型類は有限個で，その個数は $B_{p,\infty}$ の類数に等しい．さらに $\mathbb{F}_p$ 上のモデルを持つものの個数の公式は $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数で書ける，などなど，とても算術的だ．

次に，$\lambda \neq 0, 1$ として

$$E(\lambda) : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

という楕円曲線を考える．この曲線のパラメータ λ とこの曲線の J 不変量の間には当然関係があり，複素数体上で考えると，実は λ は $\Gamma(2)$ の保型関数だとみなすことができる．λ は $\mathbb{C}(J)$ 上 6 次の方程式を満たすのである．今，このような

楕円曲線を標数 p の体上考えることにしよう．一般に楕円曲線が超特異になっているためには，その曲線の **Hasse–Witt 不変量**というものがゼロになることが必要十分である．$E(\lambda)$ については，Hasse–Witt 不変量は $(-1)^{(p-1)/2}f(\lambda)$，ただし

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{(p-1)/2} \binom{\frac{p-1}{2}}{i}^2 \lambda^i$$

なので，$f(\lambda)=0$ という方程式の根を調べる必要がある．このような楕円曲線を最初に調べたのは Deuring である．彼は超特異楕円曲線の個数の公式を Eichler の類数公式に帰着して与えたが，これを直接 Hasse–Witt 不変量のゼロ点の個数から求めるのは重根がないという証明がいるので難しいかもしれない，と述べたようである．ところが Igusa は次のような観察でこれをあっさり解いた．いわゆる**超幾何微分方程式**

$$\lambda(1-\lambda)\frac{d^2y}{d\lambda^2} + (1-2\lambda)\frac{dy}{d\lambda} - \frac{y}{4} = 0$$

を標数 p の体上で考えると $y=f(\lambda)$ はこの微分方程式を満たす．このことをとりあえず認めよう．ここで，$f(\lambda)=0$ が重根 α を持つと仮定すると，微分方程式の第 2 項と第 3 項が $\lambda=\alpha$ で消える．しかし，$f(0)=1$, $f(1)=\binom{p-1}{(p-1)/2} \not\equiv 0 \bmod p$．従って，$\alpha \neq 0, 1$ であるから，微分方程式から実は $f(\lambda)$ の 2 階微分も $\lambda=\alpha$ で消え，よって α は 3 重根でもある．これを繰り返せば $f(\lambda)$ が $\lambda-\alpha$ で何回も割れることになり矛盾する．これは標数 p の微分方程式の大変面白い応用である．

なお，$f(\lambda)$ がこの微分方程式の解である事情は次の通りである．パラメータ α, β, γ で決まる次の微分方程式を超幾何微分方程式と言う．

$$\lambda(1-\lambda)y'' + (\gamma-(\alpha+\beta+1)\lambda)y' - \alpha\beta y = 0.$$

今 $(m)_n = m(m+1)\cdots(m+n-1)$ と定義すれば，上の微分方程式は，γ が 0 や負の整数でない限りは，次の級数

$$F(\alpha,\beta;\gamma;\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}\lambda^n$$

を解に持っている．ところが，級数 $F(1/2,1/2;1;\lambda)$ の $(p-1)/2$ 次までの部分は mod p では $f(\lambda)$ と一致している．このことは $(p-1)/2 \equiv -1/2 \bmod p$ からすぐわかる．しかし $n=(p+1)/2$ 以上では F の係数が p で割り切れるところがいくつか続くので，とりあえずは方程式に影響しない．よって $f(\lambda)$ が標数 p の超幾何微分方程式を満たすのが証明できる．Igusa はこの方法で，超特異楕円曲線の個数を数え，結果的に，$B_{p,\infty}$ の類数公式の別証も与えた．

7. 代数曲線上の有理点

一般に有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影的代数曲線 C の点で，座標が有限体 $\mathbb{F}_{q^m}$ に入るものの個数を $N(q^m)$ としよう．この $N(q^m)$ の母関数にあたるのが C の**合同ゼータ関数**と呼ばれるものである．合同ゼータ関数に関する**リーマン予想**は Weil によって証明された．これは，C の種数を g とするとき，$N(q^m)$ に関する次の評価式と同値である．

$$|1+q^m-N(q^m)| \leq 2gq^{m/2}.$$

実際には特異点のある曲線 $f(x,y)=0$ を同値な非特異曲線に変えようと思ったら，x, y 座標だけで書けるとは限らないので，$\mathbb{F}_{q^m}$ 有理点というのは，それほどやさしく計算できるとは限らないが，それでも具体的に計算できそうな方程式の解の個数の評価を与えているわけである．ところで，時代が進むにつれ，この不等式は，g や C をいろいろ動かしたときに，どの程度精密なものなのか，ということが問われ始めた．例えば q を固定して g をどんどん大きくすると $N(q)/g$ の上極限 $A(q)$ は上の評価式で単純に得られる評価より小さく，また q が平方数なら $A(q) \geq \sqrt{q}-1$ だが，これが $A(q)$ の予想値でもある，と言った研究が Ihara により始められ，後に完全に証明された．

一方で，通信の誤りを訂正するための符号理論では，**代数幾何符号**というものがあって，ここではなるべく $N(q^m)$ が大きい代数曲線が，実用上必要とされている．例えば上の不等式で m が偶

数ならば，$q^{m/2}$ は整数であるから $N(q^m)$ の最大値が $1+q^m+2gq^{m/2}$ か，という問には意味がある．Serre は（良く知られている $g=1$ のときの他に）$g=2$ となる曲線に対する $N(q)$ の最大値を具体的に与えた．その方法は，大体次のように要約できる．E を楕円曲線とする．p が大きいと主偏極アーベル多様体 $\mathcal{P}=(E^2,\Theta)$ で Θ が既約なものがある．任意の 2 次元主偏極アーベル多様体は種数 2 の代数曲線 C のヤコービ多様体なので，$\mathcal{P}$ もそうである．トレリの定理などを用いて，C の定義体を十分小さく取り直せる．ここでは種数 2 の曲線は皆，超楕円曲線であることも用いる．さらに，代数曲線 C のゼータ関数を E^2 のゼータ関数に帰着し，大きな $N(q)$ を持つ C の存在を言う．同様の問題を種数 3 で考えると，任意の $p\geq 3$ について，$N(p^2)=1+p^2+6p$ となるような $\mathbb{F}_p$ 上の種数 3 の代数曲線の存在も証明できる．この場合は E として超特異楕円曲線をとって (E^3,Θ) を考える．任意の主偏極アーベル多様体がヤコービ多様体であることは変わらないが，代数曲線が超楕円曲線とは限らないので，定義体に問題が生じて，そこが難しい．そこで都合の良い主偏極をコントロールするために，4 元数的エルミート形式の各種の体積公式の計算などが必要になる．実はこのような計算は，ジーゲル保型形式の次元公式や跡公式と言われているものと，**ラングランズ予想**などを通じて，深いところではつながっており，興味はつきない．

参考文献

1) F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grade*, B.G. Teubner, (1884); 邦訳，関口次郎訳，『正 20 面体と 5 次方程式』シュプリンガー・ジャパン (1997).

2) G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, (1971), xiii+ 267 pp.

3) 高木貞治，『近世数学史談・数学雑談』，共立出版．

4) H. Weber, *Lehrbuch der Algebra III, Braunschweig*, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. (1908) XVI+733.

（いぶきやま・ともよし，大阪大学大学院理学研究科）

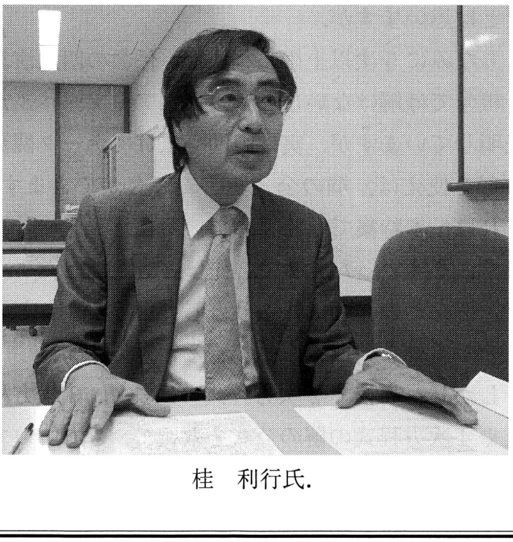
数学は面白い！

桂　利行（聞き手：編集部）

1. 現代代数学と方程式—特集テーマについて

——今回の特集では，$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$,（$n = 1, 2, 3, \cdots$）のような n 次方程式から，微分方程式まで取り上げられております．これらにはどのような違いがあるのでしょうか．

方程式というのは数理科学的な何かの状態が満たす等式です．代数方程式というのは多項式だけでそうした状態が表されるようなもので，例えば，関数の微分が等式に入ってくると微分方程式になるわけです．



桂　利行氏.

方程式と一言でいっても，解をどこで考えるかが重要で，代数方程式の場合でも，複素数で考えるか，実数の範囲で考えるか，有理数や，もしくは整数の場合で考えるか等で，解の状態がずいぶん変わってきます．

例えば，実数の範囲で考えたら，$x^2 + 1 = 0$ といった代数方程式は解をもっていないわけですが，複素数で考えたら解をもっています．あるいは，方程式の解を整数の範囲で考えたら，整数論的にも面白いフェルマーの最終定理のような話になります．ですから，同じ方程式でも，解の空間をどう考えるかで問題の意味が変わってきます．

また，微分方程式でも，古典的な関数の範囲で解を考えるか，シュワルツの超関数で考えるか，あるいは佐藤超関数で考えるかで違ってきますから，どの範囲で考えるかがこれも大事になってきます．

ところで，代数解析というのは微分方程式に代数的な手法を導入して考えるわけですが，京都大学におられた佐藤幹夫先生を筆頭に，柏原正樹先生や河合隆裕先生たちによって，1970年代から意欲的に研究されてきました．その頃から，佐藤超関数がだんだん盛んになってきて，微分方程式を佐藤超関数を用いて代数的な手法で扱おうという，そういうところから代数解析という分野が始まったのです．

解析学で登場する方程式には，解の空間をどう

扱うのかという違いの他に，手法が代数的なのか，あるいは ε–δ 論法などを使って不等式で論理展開するのか，といった違いがあります．代数方程式はこうした微分方程式とは違って，整数解があるとか，複素数解があるとかを考えます．等式を解くという観点では共通しているわけですが，扱っている対象が，数の範囲か，関数の範囲なのか，という違いがあることになります．

例えば，初めの質問にあった式で言えば，係数 a_n が整数だったら，整数解を考えることも意味があるし，有理数解や実数解，複素数解をそれぞれ考えることも意味があるので，係数をどこで考えるかによって，考える解空間が制限されたりするようなこともあるわけです．

先ほどの話に出た佐藤超関数というのは，ある意味，究極の関数と言えるわけですが，それを使う場合はコホモロジー理論が必要になりますので，手法が代数的になることから代数解析と言われるわけです．方程式としては，微分方程式を考えることになります．

――佐藤超関数は，シュワルツの超関数と比べてかなり広い範囲で扱えますね．

そうですね．私の専門とは違いますが，シュワルツの超関数というのは，C^{∞} 関数といって何回でも微分できる関数のカテゴリーで考えた超関数で，佐藤超関数はそれも含んでいて，もっとコホモロジー論的で代数的になるので，最初に出てきたときは解析の人はちょっとびっくりしたというか，非常に新鮮だったんじゃないかなと思います．

佐藤先生が発表されたのは 1958 年頃だったと思いますが，それからしばらくの間はほとんど誰も手をつけなかったと聞いています．10 年ぐらい経って，当時東京大学におられた小松彦三郎先生が，ずいぶん発展させたという話は知っていますが，私が数学に物心がつく以前の昔の話です．私は 1972 年に大学を卒業しましたので，これは私にとって歴史上の話になりますね（笑）．

2. 代数方程式の解の公式

――いわゆる「解の公式」と呼ばれるものがありますが，例えば 2 次方程式の解の公式は，中学生にとっては手を動かすのに格好の題材になっていたように思います．3 次，4 次のものにもそういった効用はあるのでしょうか．

2 次方程式は中高生が演習を行う格好の教材ですが，3 次方程式とか 4 次方程式の解の公式というのは教材としてはあまり適当ではないと思いますね．

例えば，2 次方程式の場合は平方完成することで解の公式が求まります．3 次方程式や 4 次方程式の解の公式をつくる場合でもそれほど難しい数学を使っていませんから，非常に良くできる高校生ならば，自分で考えて作れる範囲のことではないかと思います．先生から「式変形して頑張れば解けるよ」と言われれば，できる人ならば解けると思います．

3 次方程式の場合は，一般には根が 3 つあるわけですが，根が実根でも，解の公式の中には複素数が必要になります．複素数の世界を通らないと解の公式になっていないわけですから，そういう意味でも，実用的にはあまり有用ではないと思いますね．ただ，解の形が具体的に書けますから，係数の四則演算と根号で解が書けるのは面白いことだとは思いますが．

ちなみに 5 次以上の方程式が，係数の四則演算と根号では解けないことは，ガロアやアーベルが証明していますが，実は範囲を広げてテータ関数などを使えば，解の公式を書くことができます．これは，本特集で執筆されている梅村先生の仕事です．そういった意味で，先ほどもお話したような，解をどの範囲で作ろうとしているのか，というのが重要な観点になってくると思います．

しかし，高校で 2 次方程式の延長で，3 次方程式や 4 次方程式の解の公式を教えて，さあ解いてみなさい，というのは非現実的ですね．方程式を

満たしていて代入したら0になるわけですから，解の形が具体的に書ければすっきりはしますけれども….

3. 代数学の考え方と微分方程式

——先ほど代数解析のお話があったように，代数的な手法を用いて微分方程式の解を調べる，という手法がありますが，どのようなメリット・デメリット（解析するとわかること・わからないこと等）があるでしょうか．

私の専門は代数解析と近いわけではないのですが，代数的な手法を用いて微分方程式を調べるといっても，代数解析だけがすべてではありません．微分方程式のガロア理論のような話や，パンルヴェ方程式の解がどれぐらい超越的なのか等を調べるのも代数的手法なので，一口にいっても，ずいぶん広いと思います．

一般の大学生にとって，身近なところでは，例えば線形微分方程式を解くといった話がありますが，これは行列と行列式の話になって，その固有値問題を解くという話になります．このようにきれいに整理されて分かってしまえば見通しがよくなります．そんな代数的手法であればメリットがあるわけですよね．

ただ，解析のほうで代数化ができる部分は，限られていると思います．ほとんどの場合，ε–δ 論法を用いたり，不等式を有効に用いたりしなければなりません．非線形の話もそうですが，代数に持ち込んで美しくやるというわけにはなかなかいかないところが，解析学の面白いところではないでしょうか．

私の専門は代数幾何ですから，数学のいろいろな現象は美しく最終的に整理できて，純化していけば代数になって見通しがよくなる，という方向であってほしいと思いますが，代数だけでは扱えないような所はありますよね．

代数幾何の例では，有名なリーマン・ロッホの定理というのがありますが，この定理は証明された当初は位相幾何的なものでしたが，アレキサンドル・グロタンディークが出て，グロタンディークのリーマン・ロッホの定理というふうに完全に代数化して整理されました．しかし，一般的には解析のぐちゃぐちゃとしている所は代数化できないがゆえに，解析独特の手法を用いて，本質的に新しい所が出てくるような部分が残っていくのだろうなと思います．

解析でも，線形的なところは代数化できることが多いような気がしますが．行列やその固有値問題の話にできることが多いですから….

4. 影響を受けたこと

——先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせ下さい．

そうですね．先ほども話に出た佐藤幹夫先生からかなり影響を受けたように思います．私が大学に入学した頃，佐藤先生はまだ40代前半でカリスマ的というか，エネルギッシュでいかにも数学は面白いのである，というような雰囲気で教えてくださいました．

1年生の頃から先生の研究室に伺って教えをうけていましたので，何がなんだか全然わからない所もたくさんありましたが，数学観というのか，私の数学人生において大きな影響があったと思います．

数学科に進学して3年生のときの関数論の先生が，小平邦彦先生でした．講義も非常にゆっくりしているように見えて，きちっといろいろな所は押さえて，所定のところまでちゃんと終わっているといった講義で，非常に印象に残っています．そのときに助手でいらっしゃったのが，飯高茂先生や新谷卓郎先生で，何かもうエネルギーが教室中に溢れているような感じでした．

佐藤先生の影響もあって，私は代数解析にも魅力を感じていたのですが，そのとき代数解析をや

る上で当時柏原先生たちは代数幾何の手法を使っておられたということもあって，それでスキーム理論などを勉強し始めて，専門である代数幾何の世界に入っていきました.

ですから，若いときにエンカレッジされるというか，魅力を感じさせてくれる先達がいると，若い人はやってみようかなと思いますね．鈴木・根岸両先生のノーベル化学賞を見てもそうですが，日本のいろんな所で科学熱が高まっていますね．魅力的な仕事をされてきた方たちが，高校・大学等で講義・講演をして，直接学生に教えてくだされば，その分野が進歩していくのではないかと思います．湯川・朝永両先生のときもそうですが，やっぱり誰かそういう起爆剤のような存在の人たちがいれば，その影響は大きいと思います.

佐藤先生もすごい吸引力だったですよ．大学院に入ってからも，助手になってからも，何回か集中講義などにも参加させていただいたのですが，魅力的だったですね．講義の内容は，ときに寄り道ばかりということもありましたが，聴講して良かったなという印象が残っています.

私が学生だった当時，佐藤先生が直筆で作られた線形代数の試験問題用紙などもまだ残っていますが，突飛な問題などなく内容も非常に教育的で，例えば，行列の逆行列を計算しなさい，とか，基本的な問題が多かったです．ちょっとひねったものもありましたが．小平先生の講義ノートもまだ残ってますよ（笑）．もう40年くらい前ですから，一般的な教科書（『複素解析』などの名著）を書かれる前の時代のものです.

5. メッセージ

――今後，研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします.

数学は，面白いんですよね．最初のうちは計算練習をしたり，ある程度概念を整理したりしなくてはいけないから，その辺りの段階では退屈ですが，レベルがあがっていくうちに面白くなって，無限次元の空間で碁を打っているような，そんな感じがあります．やっているうちに自分のイメージができてきて，その分野の形が見えてきて，その感覚でいろいろな未知の問題が解けるようになります．そうした過程がワクワクします.

何かのきっかけで数学が面白いと思ったら，周りの先生にアドバイスをもらいに行ったりして，自分のイメージを作っていって，一生懸命やれば，若い人はきっと何かできると思います.

また，若い頃に勉強したことは結構無駄にならないようにも思います．1974年に，ドリーニュが解いてフィールズ賞をもらったヴェイユ予想というものがあるのですが，その予想を解くために標数pの世界に標数0のコホモロジーの理論を作りたい，という流れが1950年頃からずっとありました．その中で，ビット環の層のコホモロジーというのは，標数0のコホモロジーを作るという一つの手法だったんですね．それはセールが考えたことなのですが，その理論を紹介するために私は大学4年生の終り頃，セールの論文を徹底的に勉強しました.

しかし，そのコホモロジーというのは有限生成ではないということがわかって，その後，クリスタインヌ・コホモロジーとかエタール・コホモロジーなどが出て，ビット環の層のコホモロジーというのは結局あまり注目されなくなったんですね.

しかし，30年ぐらいしてから，私がその20代当時に勉強していた理論が，$K3$曲面のモジュライのサイクルを計算するというときに，たまたま役に立ったんですね.

当時は人に紹介するために詳細に勉強しただけだったのですが，詳細に勉強していたからこそ完全な知識となっていて，その問題に応用できたわけです．それで外国の方と共著の論文が書けて，それ以後その人ともすごく仲良くなりました．だから，今は無駄だと思っても，将来役に立つことはたくさんあると思いますね.

最近は，若い人は論文をたくさん書かないと就職がなかなかできないので，自分の目の前にあることに集中して論文を量産せざるをえないと思いますが，できるだけアンテナを広げていろいろなことに興味を持つと，今は関係なさそうでも，将来は大きなことにつながるかもしれません．

大学で行なわれている数学の談話会などを見ても，最近は，専門に近い人しか出席していない感じですが，昔はどんな分野であろうと１回は聞いてみようと結構出席していましたよね．そういった意味では，最近の状況は全体的に専門化しすぎているように感じます．

それから，数学は何年か経って振り返ってみると，ものすごく進歩していることが多いんですね．例えば，私が大学院生の頃は，代数幾何では曲面論は小平先生が整備されていたのですが，アーベル多様体のような特別な多様体を除けば，高次元のことをやるというのはほとんど夢物語だったんですね．それが，森重文先生が森理論を 1980 年頃に作られて，それ以来世界中にあっという間に高次元の話が広がって，フィールズ賞級の仕事がずいぶん出ています．3 次元の話は森先生や川又雄二郎先生たちが基本的な所はほとんどされていますし，高次元も最近ではかなりできています．こうしたことは，私が学生の頃から見ると隔世の感があります．

また，1983 年にファルティングスが解決したモーデル予想というのがあります．これは，有理数体上の不定方程式の話です．私は修士の頃に関数体上のモーデル予想を解決したマニンの論文を読んでいたことがありました．この論文でガウス＝マニン接続という一種の微分が導入されているのですが，有理数体上の場合では微分が作れないため，モーデル予想を有理数体上解くのはかなり難しいだろうと思っていたら，数論幾何のような手法が出てきて，その方面からアプローチされて解けてしまったんですね．それ以降もこの分野はどんどん進歩していますし，フェルマー予想もびっくりするような手法で解けましたね．例えば，パンルヴェ方程式も 1970 年頃は岡本和夫先生がほとんど１人で研究されていましたが，今では数理物理とも関係して多くの人が研究していてどんどん進歩しています．

よい数学というのはどこかで花開くので，自分で見つけた面白いと思ったことは大事に温めていって，大きな成果に育ててほしいと思いますね．

今は理科離れとか言われますが，生涯何かするとしたら，数学というのはやりがいのあるよい対象だと思いますから，ぜひ力のある若い人が本気で研究して，切り開いていってほしいなと思います．

また，最近では産業界に数学を応用しようという動きもありますから，自分の分野ばかり考えないで，ちょっと周りを見たりすれば，そこでも新しい応用が見つかるかもしれません．

そういうチャレンジによって，面白い数学がどんどん広がっていくのだと思います．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

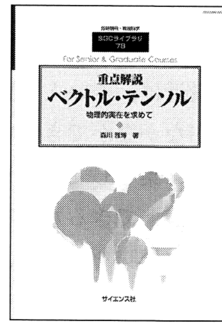
(2010 年 10 月，
法政大学小金井キャンパス研究室にて)

(かつら・としゆき，法政大学理工学部)

重点解説
ベクトル・テンソル

物理的実在を求めて

森川雅博著，B5 判，120 頁，本体 2095 円，サイエンス社



まずタイトルを見て，学生受けするのかどうかは気になった．最近の本には「わかりやすい」,「やさしい」等という言葉が最初についていることが多く，そうしないと手にとってもらいにくいイメージがあったからだ．次に実際に読んでみると，このタイトルでよかったのだということに気づいた．表紙に「For Senior & Graduate Courses」と書かれているように，ある程度は力学，電磁気学，流体力学などの予備知識があって，それらの本で一度はベクトルやテンソルについて学んだことがある人が，統一的な理解を深めるのに役立つ内容なのだ．実際，筆者は一読者として楽しんだが，あまりベクトルや物理の予備知識を持たない人には難解と感じるかもしれない．

第 1 章「物理的実在」では，我々の自然認識の仕方や，相対性原理と関係した物理的実在のあり方について書かれている．その書き出しを見て，せっかちな読者は，飛ばして 2 章に進みたくなるかもしれない．しかし，物理的な考え方の根本的な部分がここで最も多く書かれているため，落ち着いてじっくり考えながら読むべきだろう．

第 2 章「テンソル—実在の様式」では，第 1 章の内容を受けて，座標系の変換に対してどのように変換するものが，物理的実在と言えるか考察を進めてゆく．スカラー場，ベクトル場，テンソル場，そしてスピノル場に至るまでと grad, div, rot などの概念が説明されている．2.1 では一般的な座標変換を念頭に置いて説明しているので，若干敷居が高く感じる読者もいるかも知れないが，徐々に具体的な話に入ってゆくので，恐れずに読んでいくのがよい．

第 3 章「粒子場の力学」は，第 2 章の座標系の変換の議論を用いて，物理学における様々な基礎方程式の形を決めていく．ニュートンの運動方程式，ナビエ・ストークス方程式，シュレディンガー方程式など，多岐に渡る．これほど多岐に渡る方程式系を，統一的に扱ったテンソルの本は少ないと思われ，本書の特色の一つである．数学的な議論から，かなり方程式の形を決めてしまえることに驚く読者もいると思われる．一度これらの方程式系を学んで，わかったつもりになっている人ほど勉強になる部分だろう．

第 4 章「一般座標系」では，接続や共変微分の概念を導入して，第 5 章「ローレンツ変換」や第 6 章「時空の一般の変換」への数学的準備をしている．これら一連の部分は，その前の章までに比べると比較的標準的な教科書の書き方に近いものと思われるが，ベクトルやテンソルを学んで最も有り難みを感じる部分であり，欠かすことはできないだろう．p.10 で前置きのあった電場と磁場の関係が第 5 章でようやく明らかにされる．4 次元のテンソルを用いて電磁場を表したときの，マックスウェルの方程式の簡潔さを味わってほしい．第 6 章で重力というものの実在のありかたが明らかにされる．短いページ数でアインシュタイン方程式の導出まで考察している．また，第 7 章「物理的実在の広がり」では重力の接続と電磁場のゲージポテンシャルの類似などが説明されており，これも短いページ数では省かれがちな内容だけに，筆者のこだわりがうかがえる．

全体を通して気になったのは，章ごとに図が一番最後にまとめられていて，文中にあまり図についてのコメントがないため，若干浮いた感があることである．本当は面白い図が多いのだから，できれば章の途中に図とその説明も欲しいと感じた．また，途中計算や章の途中の問題の解答は，意図的に省略されている部分がある．これは，冒頭に書いた「やさしい」本，途中計算をすべて追ってくれている本を期待する読者には不親切に感じるかもしれない．しかし，まえがきにある「個々の物理法則を，…常に批判的に階層構造を自分の感性と計算で確認していくこと」というメッセージをくみ取るべきだろう．ゼミで用いて，省略されている計算や問題を議論し合うという使い方も考えられる．本書は，自分の頭で考え計算する意欲のある読者にとっては，物理的洞察を深めることができる格好の手引きとなるだろう．

玉置 孝至（日本大学工学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

北川　源四郎

1981年3月号

1973年，後に基礎科学部門で京都賞を受賞する赤池弘次氏は情報量規準AICを提案した．これを契機に時系列解析におけるモデル選択のように，従来の推定論・検定論の枠組みでは対応が困難であった多くの分野で一気に実用的なモデル構築が始まった．

AICは予測の視点，分布による予測，Kullback–Leibler情報量による評価の3つを基礎に，推定したモデルの良さをデータによって評価することを可能にした．真のモデルを仮定する推定論や検定論に依拠した統計的推論の枠組みに対して，統計的モデリングという新しい統計的推論のパラダイムが確立したのである．AICの提唱を契機に統計科学は検証型の科学的方法論から予測や発見のための方法論へ大きくその可能性を広げてきた．

しかし，AICの提唱からわずか8年，情報量規準に基づく統計的モデリングの考え方が多くの研究領域に普及する間もなく，1981年には早くも新しい波が押し寄せていた．ベイズモデリングである．AICは予測の視点に基づき，従来の「真のモデル」を求めるという立場を，より「良いモデル」を求めるという立場に転換したものである．これが統計科学における偉大なブレークスルーとなった．

しかし，AIC導出の基本となった考え方は，不確実性を伴う現象は分布で考えるべきということであった．したがって，AICを用いて，点推定的にパラメータの最尤推定やモデル選択を行うことは，統計的な方法としては中途半端であることは明らかであった．実際，「良いモデル」を求めるためには，次数を打ち切った簡潔なモデルを選択する代わりに，モデルのパラメータに適切な制約を導入することも可能だったのである．

赤池氏はAICの提案からわずか3年の1976年には，既にベイズモデリングの研究に転身していた．ベイズの方法は18世紀以来その優位性は認知されながらも，その基本的考え方，事前分布決定の問題，事後分布の計算の困難さから現実の問題への適用は極めて限られていた．1980年赤池氏は，季節調整の問題に関連してベイズモデルの情報量規準ABICを提案し，これがベイズモデリング実用化への大きな一歩となった．本特集はそのような時代を背景に出版された．



その後，情報通信技術の飛躍的発展もあって，ベイズモデリングは今では統計科学はもとより，機械学習をはじめとして多くの科学技術分野における統計的モデリングの主要な方法としての地位を確立し，成功例は枚挙に遑がない．

30年を経過した現在から振り返ってみても，本特集が刊行された1981年はまさにその後，連綿と打ち続く統計的モデリングの潮流の第一波が押し寄せた記念すべき時であった．

（きたがわ・げんしろう，統計数理研究所）

パターン形成の方程式

高木 泉

1. パターン形成

「パターン」とは，繰返し現れることやものを指す言葉であるが，日常的には，厳密に同一のものが繰り返される場合だけに限定されずに使われている．本稿でも，その意味を非常に広く捉えて用いることにする．一方，「かたち」は繰返しを要求しない．生物の発生段階では，ほぼ一様に見える受精卵から細胞分裂，細胞の移動，分化など複雑かつダイナミックな過程を経て，成体のかたちが形成される．このような形態形成も含めて，パターン形成と呼ぶことにする．

本シリーズは「現象から方程式を創り出す」と名づけられている．今回は，まさに「創り出す」という言葉のもつイメージに相応しい話題を提供したい．流体の対流によって引き起こされるベナール流や，異なる速度で回転する2つの同心円筒間の粘性流体に現れる縞模様テイラー流もきれいなパターンをつくる．これらは，粘性流体の基礎方程式であるナビエ＝ストークス方程式，もしくはそれに温度分布の変動を支配する方程式を加えたもので記述され，いわば素性がよく知られた現象である．本稿では，生命現象に見られるような非常に複雑な過程を経て出現するパターンを眺めて，その本質をできるだけ単純に表現しようという試みの中から生み出された方程式系について紹介する．

2. 拡散誘導不安定化

アラン・M・チューリング（1912–1954）は論文「形態発生の化学的基礎」において，生物の発生過程における形態形成が，細胞の変化を促す性質をもった化学物質（形態元）によって制御されている，という仮説を提唱した．従って，化学物質の濃度分布がつくるパターン（**前パターン**と呼ぶ）が細胞の変化の位置決めをしていると言える．重要なことは，この前パターンが外から操作されて作られるのではなく，細胞塊の中で自律的に形成されるという点である．チューリングは，これに関して，次のような**拡散誘導不安定化**という画期的な考えを提出した．「拡散率の異なる2つ以上の化学物質が反応するとき，空間的に一様な状態が不安定になり，その結果，空間的に非自明な構造をもった安定な定常状態が出現し得る．」

本来，拡散とは粒子がたくさんあるところから少ないところに移動する現象であるから，分布は一様化されるはずである．チューリングは，この常識に反して，拡散のせいで分布の非一様化が起こると主張したのである．

拡散誘導不安定化という直感とは相容れない現

象を理解するには，定量的な考察がどうしても必要である．まず，生成消滅しながら拡散する粒子群の個数の変化を記述する方程式を導こう．空間内の点 P において時刻 t における粒子の密度を $C(P,t)$ とする．これは，点 P のまわりの小さな領域に単位体積あたり $C(P,t)$ 個の粒子が存在することを意味する．以下簡単のため粒子の分布は x 座標にのみ依存していると仮定する．いま，空間内の直方体 $B=\{(x,y,z) \mid x_0 \le x \le x_0+\delta_x,\ y_0 \le y \le y_0+\delta_y,\ z_0 \le z \le z_0+\delta_z\}$ に粒子が詰まっているとする．ただし，x 軸に垂直な側面の面積は 1 であるとする（つまり，$\delta_y \cdot \delta_z = 1$）．そうすると，$B$ 内の粒子の個数 $N(t)$ は $N(t)=\int_{x_0}^{x_0+\delta_x} C(x,t)\,dx$ により与えられる．このとき，時刻 t_0 から $t_0+\Delta t$ の間に起きる B 内の粒子の個数の変化は，B 内で生成あるいは消滅する粒子の正味の個数に，境界を通して B 内に流れ込む（あるいは流れ出す）粒子の正味の個数を加えたものに等しい．そこで，点 x，時刻 t において，単位時間に単位体積あたり正味で $F(x,t)$ 個の粒子が生成されるとし，また，点 x において単位時間に x 軸に垂直な平面を単位面積あたり $J(x,t)$ 個の粒子が通過するとすれば，

$$
\begin{aligned}
&N(t+\Delta t)-N(t)\\
&=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta_x} F(x,t)\,dx\right)dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} J(x_0,t)\,dt-\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} J(x_0+\delta_x,t)\,dt
\end{aligned}
$$

が成立する．ただし，$J(a,t)$ の符号は，$x=a$ を通過して右側に移動する粒子が左側に移動する粒子よりも多いとき，正とする．両辺を Δt で割って，$\Delta t \to 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{dN}{dt}(t_0) = &\int_{x_0}^{x_0+\delta_x} F(x,t_0)\,dx + J(x_0,t_0)\\
&-J(x_0+\delta_x,t_0)
\end{aligned}
$$

となる．左辺は $\int_{x_0}^{x_0+\delta_x} \partial C/\partial t(x,t_0)\,dx$ に等しいことに注意しよう．左辺と右辺の第 1 項に積分に関する平均値の定理を適用すると

$$
\begin{aligned}
\delta_x \frac{\partial C}{\partial t}(x_1,t_0) = \delta_x F(x_2,t_0)&\\
+J(x_0,t_0)-J(x_0+\delta_x,t_0)&
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，x_1, x_2 は x_0 と $x_0+\delta_x$ の間の数である．両辺を δ_x で割り，$\delta_x \to 0$ とすると

$$
\frac{\partial C}{\partial t}(x_0,t_0) = F(x_0,t_0) - \frac{\partial J}{\partial x}(x_0,t_0)
$$

を得る．x_0, t_0 は任意であるから，

$$
\frac{\partial C}{\partial t}(x,t) = F(x,t) - \frac{\partial J}{\partial x}(x,t) \tag{1}
$$

と書こう．さて，$J(x,t)$ はどのように決まるであろうか．もし密度が至るところ同じであれば，粒子の移動は起こらないから，$J(x,t)$ は $C(x,t)$ の値そのものよりも $\partial C/\partial x(x,t)$ に依存していると考えるのが自然である．そこで

$$
J = -D\frac{\partial C}{\partial x}
$$

としたものが**フィックの法則**である．ここで，$D>0$ は**拡散係数**（あるいは拡散率）と呼ばれ，一般には，空間座標 x や密度 C にも依存している．簡単のため，拡散係数 D は正の定数であるとする．そうすると

$$
\frac{\partial C}{\partial t} = F + D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{2}
$$

が得られる．以上の議論を y 軸方向にも，z 軸方向にも行えば，

$$
\frac{\partial C}{\partial t} = F + D\Delta C
$$

が得られる．ただし，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ はラプラス作用素と呼ばれる微分作用素である．

以上の準備の下で，拡散誘導不安定化について，考察を始めよう．いま，2 つの化学物質 X と Y があるとし，それぞれの濃度を同じ文字で表すことにする．チューリングに倣って，多数の細胞が周

長 2π の円周上に分布し，円周上の 1 点 x が 1 つの細胞に対応すると考えよう（従って，無限に多くの細胞があるとする．彼は細胞が有限個の場合も考察している）．もし拡散がなければ，X と Y は反応により単位時間にそれぞれ $f(X,Y), g(X,Y)$ だけ濃度が変化するものとすると，(2) を適用すれば，X, Y は反応拡散方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + f(X,Y), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + g(X,Y) \end{cases} \tag{3}$$

に従って変化することになる．状況設定により，$X(x,t), Y(x,t)$ はともに x に関して周期 2π の周期函数である．さて，反応項に対し，次の 2 つの仮定をおく：

(i) $f(\bar{X},\bar{Y}) = g(\bar{X},\bar{Y}) = 0$ となる $\bar{X}, \bar{Y}$ が存在する．つまり，$X(x,t) \equiv \bar{X}$, $Y(x,t) \equiv \bar{Y}$ という空間的に一様な定常状態が存在する．

(ii) さらに，$(\bar{X},\bar{Y})$ は拡散がなければ，漸近安定である．つまり，(3) において $\mu = \nu = 0$ として得られる常微分方程式を考えるとき，初期値を $(\bar{X},\bar{Y})$ の十分近くにとると，解 $(X(t),Y(t))$ は $(\bar{X},\bar{Y})$ の近くに留まるばかりでなく，$t \to +\infty$ のとき，$(\bar{X},\bar{Y})$ に収束する．

そこで，$X(x,t) = \bar{X} + \phi(x,t)$, $Y(x,t) = \bar{Y} + \psi(x,t)$ とおき，十分小さい擾乱 $\phi(x,0), \psi(x,0)$ を与えたときに，ϕ, ψ がどのように振る舞うかを見てみよう．$(X,Y) = (\bar{X},\bar{Y})$ が (3) の定常解であることを用いると，$f(\bar{X}+\phi, \bar{Y}+\psi) = f_X(\bar{X},\bar{Y})\phi + f_Y(\bar{X},\bar{Y})\psi + (\phi, \psi$ について 2 次以上の項) とテイラー展開できることに注意しよう．ここで，$f_X = \partial f/\partial X$ であり，他も同様である．従って，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a\phi + b\psi + (\text{高次の項}), \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + c\phi + d\psi + (\text{高次の項}) \end{cases} \tag{4}$$

と展開される．ただし，

$$a = f_X(\bar{X},\bar{Y}), \quad b = f_Y(\bar{X},\bar{Y}),$$
$$c = g_X(\bar{X},\bar{Y}), \quad d = g_Y(\bar{X},\bar{Y}).$$

ところで，ϕ, ψ は x については周期 2π の周期函数であるから，

$$\begin{cases} \phi(x,t) = \dfrac{1}{2}\alpha_0(t) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n(t)\cos nx + \beta_n(t)\sin nx), \\ \psi(x,t) = \dfrac{1}{2}\gamma_0(t) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n(t)\cos nx + \delta_n(t)\sin nx) \end{cases} \tag{5}$$

とフーリエ級数に展開できる．方程式 (4) の 2 次以上の項を無視して得られる線型拡散方程式系に (5) を代入し，両辺の $\cos nx, \sin nx$ の係数を比較すると，容易に分かるように，組 $(\alpha_n(t), \beta_n(t))$ と組 $(\gamma_n(t), \delta_n(t))$ はともに同じ定数係数線型常微分方程式系

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$
$$A_n = \begin{pmatrix} a - n^2\mu & b \\ c & d - n^2\nu \end{pmatrix} \tag{6}$$

を満たす．行列 A_n の固有値を λ，それに属する固有ベクトルを (ξ_0, η_0) とすると $\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$, $\eta(t) = \eta_0 e^{\lambda t}$ は (6) の解である．このことから，「行列 A_n の固有値の実部がともに負ならば (6) のすべての解は $t \to +\infty$ のとき，$(0,0)$ に収束する．正の実部をもつ固有値があれば，(6) は $t \to +\infty$ のとき，$|\xi(t)| + |\eta(t)| \to +\infty$ となるような解をもつ」ことが分かる．さらに強く，次が成立する：

定理 1　すべての $n \geq 0$ に対し，行列 A_n のいずれの固有値の実部も負ならば，定数定常解 $(\bar{X},\bar{Y})$ は漸近安定である．ある $n \geq 0$ に対し，行列 A_n が実部が正の固有値をもつならば $(\bar{X},\bar{Y})$ は不安定である．

行列 A_n の特性方程式は

$$\lambda^2 - (a + d - n^2(\mu+\nu))\lambda$$
$$+ (a - n^2\mu)(d - n^2\nu) - bc = 0$$

であり，その 2 根の実部がともに負であるための必要十分条件は

$$a+d-n^2(\mu+\nu)<0 \quad \text{かつ}$$
$$(a-n^2\mu)(d-n^2\nu)-bc>0. \tag{7}$$

ところで，定数定常解 $(\bar{X},\bar{Y})$ は常微分方程式系の平衡点として漸近安定であると仮定したことを思い出そう．これより，$n=0$ のとき条件 (7) は満たされている：

$$a+d<0 \quad \text{かつ} \quad ad-bc>0. \tag{8}$$

従って，(7) の第1の不等式はすべての n に対して成立し，特に，a, d のうちの少なくとも1つは負でなければならない．もし両方とも負であれば，第2の不等式はすべての n に対して満たされるから，定数定常解は偏微分方程式系の定常解としても安定と言える．ところが，$a>0, d<0$ ならば，

$$n^2\mu < a-\frac{bc}{d-n^2\nu} \tag{9}$$

のとき，実部が正の固有値が現れる．条件 (9) は $n \geq 1$ を一つ固定するとき，ν に較べて μ が十分小さければ必ず満たされる．これが拡散誘導不安定化である．チューリングは，このようなことが起こる $f(X,Y), g(X,Y)$ の例として

$$f(X,Y)=\frac{1}{32}[-7X^2-50XY+57+55\gamma],$$
$$g(X,Y)=\frac{1}{32}[7X^2+50XY-2Y-55-55\gamma].$$

を挙げ，実際に数値解を求めて不安定化が起こる様子を調べた．残念ながら，このような反応を起こす反応系は化学的には非現実的であるため，実験で確認することはできなかった．

3. ギーラーとマインハルトの活性因–抑制因子モデル

論文が出版されてから2年も経たないうちにチューリングは亡くなり，研究を発展させることができなかった．次項で述べるように，チューリングの論文とは独立に，化学反応系でパターンが形成されることが実験的に発見され，その理論的解明が進められていく．一方，チューリングの考えに沿って，非線型項 $f(X,Y), g(X,Y)$ がどのような性質を持つべきかを考察し，いくつかの具体例を示したのがA・ギーラーとH・マインハルトであった．そして，そのモデルを用いてヒドラの頭部移植・再生実験（図1）のシミュレーションを行った．

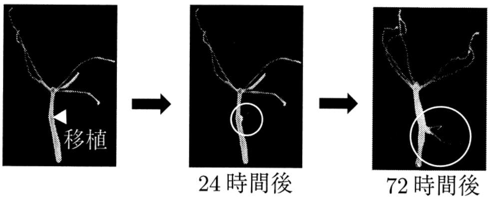


図1　ヒドラの頭部移植・再生実験．

彼らは，枯渇モデル（活性因子–基質モデルとも呼ばれる）と活性因子–抑制因子モデルを提唱しているが，ここでは，シミュレーションでよく用いられている後者について説明しよう．活性因子は，細胞の変化を促す役割をもった物質で，自己触媒的に増えるという性質をもつ．これは，爆発を起こすような反応系で典型的に見られ，濃度が高いほど反応速度が速くなることを意味する．パターンをつくるには爆発してしまうと困るので，抑制因子という活性因子の増殖を抑える役割をもった物質の存在を要請する．活性因子は抑制因子を増やし，抑制因子は活性因子を減らすとする（図2を参照されたい）．

活性因子の濃度を $A(x,t)$，抑制因子の濃度を $H(x,t)$ と書くことにし，拡散を考えないときの反応を

$$\frac{dA}{dt}=f(A,H), \quad \frac{dH}{dt}=g(A,H)$$

とする．函数 $f(A,H), g(A,H)$ が

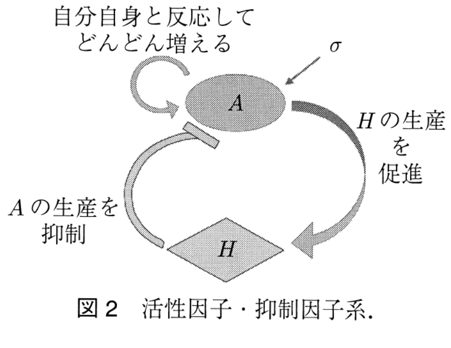


図2　活性因子・抑制因子系．

$$f(A,H) = -\mu_a A + \rho_a A^\alpha H^\beta,$$
$$g(A,H) = -\mu_h H + \rho_h A^\gamma H^\delta$$

という形をしていると仮定して，指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の満たすべき条件を求める．ただし，$\mu_a, \rho_a, \mu_h, \rho_h$ はいずれも正定数である．まず，連立方程式 $f(A,H) = g(A,H) = 0$ がただ 1 つの正の解 $(\bar{A}, \bar{H})$ をもつように，$(\alpha-1)(\delta-1) - \beta\delta \neq 0$ を要請する．次に，前節の最後に，定数定常解が不安定化する必要条件として，$ad < 0$ を挙げた．活性因子が自己触媒的に反応することは，

$$f_A(\bar{A}, \bar{H}) > 0$$

と表現される．このことから，$\alpha - 1 > 0$ が得られる．また，簡単な計算から

$$\begin{aligned} &f_A(\bar{A},\bar{H}) + g_H(\bar{A},\bar{H}) \\ &= (\alpha-1)\mu_a + (\delta-1)\mu_h, \\ &f_A(\bar{A},\bar{H})g_H(\bar{A},\bar{H}) - f_H(\bar{A},\bar{H})g_A(\bar{A},\bar{H}) \\ &= (\alpha-1)(\delta-1)\mu_a\mu_h - \beta\gamma\mu_a\mu_h \end{aligned}$$

であることが分かる．従って，条件 (8) は $(\alpha - 1)\mu_a + (\delta-1)\mu_h < 0$ かつ $(\alpha-1)(\delta-1) - \beta\gamma > 0$ と同値になる．少し記号を変えて，$p = \alpha, q = -\beta, r = \gamma, s = \delta$ とおくと，

$$\begin{aligned} &\mu_a(p-1) < (s+1)\mu_h, \quad \text{かつ} \\ &0 < (p-1)(s+1) < qr \qquad (10) \end{aligned}$$

となる．ギーラーとマインハルトは，(10) の第 2 の不等式を指数に対する条件としている．第 1 の不等式は，定数定常解 $(\bar{A}, \bar{H})$ が常微分方程式系の解として安定であるために必要な条件であり，指数 (p,q,r,s) を固定してしまえば，係数 μ_a, μ_h に対する条件となる．以上は，平衡点 $(\bar{A}, \bar{H})$ の周りで拡散誘導不安定化が起こるかどうかの条件に基づいて導いた不等式であるが，それが大域的な条件であると解釈して立てた方程式系

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D_a \Delta A - \mu_a A + \rho_a \left(c\frac{A^p}{H^q} + \rho_0 \right),$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = D_h \Delta H - \mu_h H + \rho_h c' \frac{A^r}{H^s}$$

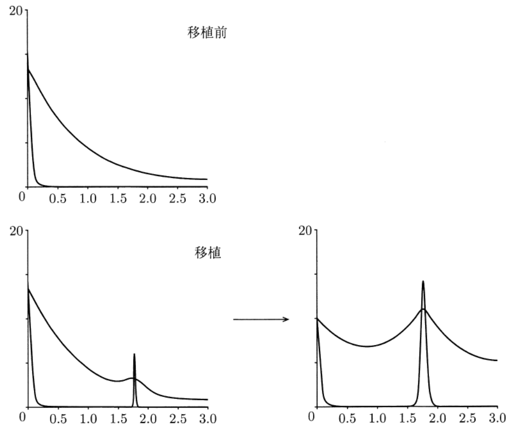


図 3　ヒドラの頭部移植・再生実験のシミュレーション．

をギーラーとマインハルトの活性因子–抑制因子系と呼ぶ．なお，(10) を満たす整数の指数の組として，$(p,q,r,s) = (2,1,2,0)$ が最もよく用いられている．また，活性因子の生産率に飽和効果を考慮したモデル

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= D_a \Delta A - \mu_a A \\ &\quad + \rho_a \left(c\frac{A^p}{H^q(1+\kappa A^p)} + \rho_0 \right) \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= D_h \Delta H - \mu_h H + \rho_h c' \frac{A^r}{H^s} \end{aligned}$$

もよく用いられる．ただし，κ は正定数である．

なお，ヒドラの再生実験のシミュレーション（図 3）では，ギーラーとマインハルトのモデルは，係数 ρ_a の空間依存性が重要な役割を担っている．

4. ベロウソフ・ジャボチンスキー反応

1950 年代初頭ソ連の生化学者ボリス・P・ベロウソフ（1893–1970）は，細胞内の有機分子の酸化過程を化学的に単純化するモデルを開発していた．この経路の中心となるのは，クレブス回路と言われるもので，有機酸が酸化され二酸化炭素と水になる．酸素を用いる器官内の反応では，酸素が酸化剤で，酵素と電子輸送蛋白質が触媒となる．それらの多くは電子を運ぶために鉄イオン（Fe^{2+}/Fe^{3+}）に頼る．ベロウソフは，クレブス回路の中間生成

物の一つであるクエン酸を有機基質とし，酸化剤として臭素酸イオン（BrO_3^-）を，また触媒としてセリウムイオンを用いて実験をしていた．セリウムは還元状態 Ce^{3+} では無色であるが，酸化状態 Ce^{4+} では薄い黄色になる．従って，試験管内の混合液は無色から黄色に変わって，反応が平衡状態に達するものと思われた．ところが，彼は試験管の溶液が無色から黄色になり，また無色に戻り，黄色くなって無色になることを繰り返すのを発見した．

彼はこの振動現象を論文にまとめて投稿したが，「常識に反する」という理由で掲載を拒否された．結局，1958 年の放射線医学会の報告集に短い記事[1)]を残しただけで，彼は失意のうちに亡くなった．1961 年その未発表原稿を読んだ大学院生アナトール・ジャボチンスキーがベロウソフの発見が本当であることを実験的に確かめ，別の試薬を用いるなど実験を改良し系統的な研究を行った．1964 年にジャボチンスキーの論文[11)]は出版されたが，この現象が西側世界に広く知られるようになったのは，1968 年にプラハで開催されたシンポジウムでのことだった．

今日，ベロウソフ・ジャボチンスキー反応（BZ 反応）とは，有機基質が遷移金属イオンの存在の下で臭素酸化物によって酸化される化学反応系のことを指す．反応は酸性溶液中で起こり，有機基質は普通マロン酸であるが，他にも多くの基質が用いられる．有機基質が反応性臭素により臭素化されることと遷移金属イオンによって酸化されることが本質的な特徴である．遷移金属としては，セリウムまたはフェロイン（*o*–フェナントロリンとの鉄錯体）がよく使われる．セリウムよりもフェロインのほうがよい色変化を起こす（レンガ色（Fe^{2+}）から明るい青色（Fe^{3+}）となる）．また，よく撹拌されたBZ 反応系では，試験管の中の混合液の色が周期的に変化するが，ペトリ皿に入れて静置すると，ターゲット（標的）模様が水面波のように広がったり，渦巻き様の模様が現れる（図 4）．

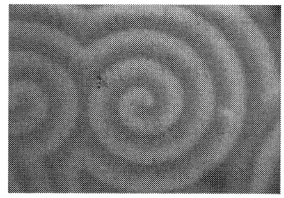


図 4　BZ 反応で現れる渦巻き模様（北畑裕之氏のウェブサイト（http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/~kitahata/bz_1.html）から許可を得て掲載）．

1972 年にフィールド，ケレスおよびノイエス[3)]は，BZ 反応が 10 の基本的過程に要約できると提唱した．さらに，全体は大きく 2 つの部分 I と II にわけることができるとした．臭化物イオンの濃度 $[Br^-]$ によってそのうちのどちらが優勢かが決まる．$[Br^-]$ が高いときは，I が優勢で，この段階では Br^- は消費され，セリウムイオンは主に Ce^{3+} の状態にある．$[Br^-]$ がもっと消費され，ある臨界値 B を過ぎると，急速に低濃度になる．この段階で I に代わって II が優勢となる．II では Ce^{3+} が Ce^{4+} に変わる．しかし，II においては Ce^{4+} は Ce^{3+} に戻りながら Br^- を生産する．そうして $[Br^-]$ が増加し，その値が十分高くなると，再び I が優勢となる．

上述の反応過程の詳細な分析に基づき，オレゴン大学のノイエスの研究グループは，主要な反応を 7 つの化学種

$$X = \mathrm{HBrO_2},\quad Y = \mathrm{Br^-},\quad Z = \mathrm{Ce^{4+}},$$
$$A = \mathrm{BrO_3^-},\quad B = \text{マロン酸},$$
$$P = \mathrm{HOBr},\quad Q = \mathrm{CO_2}$$

の間の

$$\text{(I)}\quad A + Y \xrightarrow{k_1} X + P,\quad X + Y \xrightarrow{k_2} 2P,$$
$$\text{(II)}\quad A + X \xrightarrow{k_3} 2X + 2Z,\quad 2X \xrightarrow{k_4} A + P,$$
$$B + Z \xrightarrow{k_5} fY + Q$$

という反応としてまとめたモデルを提唱した．ここで反応定数 k_j $(j = 1, \ldots, 5)$ は既知であり，f は化学量論的係数で通常 0.5 ととられる．大まかに言って，第 1 行目の 2 つの反応は I に対応し，第 2 行目の 3 つの反応は II に対応すると考えて良い．$[B]$ は定数で，モデル方程式の反応定数に繰り込むことができる．臭素酸塩イオンの濃度 $[A]$

は一定と見なすことができ，P の濃度はここでは関心がない．そこで，最後の式を $Z \xrightarrow{k_5} fY$ と簡略化した上で，**質量作用の法則**を適用すると，次の常微分方程式系が得られる：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1ay - k_2xy + k_3ax - k_4x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_1ay - k_2xy + fk_5z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2k_3ax - k_5z. \end{cases} \tag{11}$$

この方程式系は提唱者がオレゴン大学の研究者であることと振動解の存在が期待されることから，**オレゴネーター**（Oregon+Oscillator）と呼ばれている．$x^* = k_4x/(k_3a)$, $y^* = k_2y/(k_3a)$, $z^* = k_4k_5z/(2(k_3a)^2)$, $t^* = k_5t$ とおいて方程式 (11) に代入し，その後で星印を省略すると，無次元化された方程式系

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{dx}{dt} = qy - xy + x(1-x), \\ \delta\dfrac{dy}{dt} = -qy - xy + 2fz, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases} \tag{12}$$

が得られる．ただし，$\varepsilon = k_5/(k_3a)$, $\delta = k_4k_5/(k_2k_3a)$, $q = k_1k_4/(k_2k_3)$ である．ε が δ に較べて十分小さいと仮定すると第1式は $0 = qy - xy + x(1-x)$ により近似でき，これを x について解けば

$$x = \frac{1}{2}\left\{(1-y) + \sqrt{(1-y)^2 + 4qy}\right\} \tag{13}$$

となる．従って，近似方程式として，$y(t)$ と $z(t)$ を未知函数とする常微分方程式系

$$\begin{cases} \delta\dfrac{dy}{dt} = 2fz - y[x(y) + q], \\ \dfrac{dz}{dt} = x(y) - z \end{cases} \tag{14}$$

が得られる．$x(y)$ は (13) によって定義される函数である．相平面の方法などにより

$$\frac{1}{4} < f < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

のとき，周期軌道が存在し得ることが分かる．パラメータの範囲を制限すれば，3成分系 (12) でも極限閉軌道（図5）が存在することが証明されている．

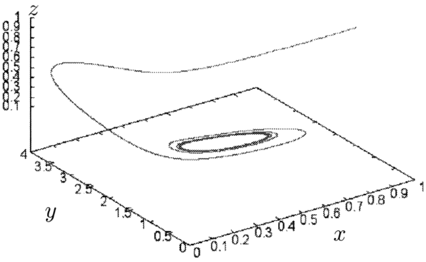


図5　オレゴネーター．

5. CIMA 反応系

ベロウソフ・ジャボチンスキー反応系では，よく撹拌されている場合には，時間的に周期運動をする．撹拌しないと空間的なパターンが現れるが，それは常に動いている（非定常パターン）．チューリングが示そうとしたのは，定常パターンが存在することであった．およそ40年後の1990年にようやくド・ケッパーの研究グループによって，ゲル反応器内の亜塩素酸塩/ヨウ化物塩/マロン酸（CIMA）系において拡散誘導不安定化による定常パターンの生成が確認された[2]．他の系でチューリングのパターンを観測するのが難しいのは，活性因子と抑制因子の拡散係数が大きく異なるという必要条件に起因する．実際，水性媒質ではほとんどすべての単純な分子とイオンは $1.5\times10^{-5}\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ の2倍の範囲内に収まる拡散係数をもち，この必要条件を満たすようなものを実現することはできない．CIMA 反応系では，ヨウ化物塩が活性因子，亜塩素酸塩が抑制因子の役割を果たす．指標として色変化を起こす澱粉を加えておけば，3-ヨウ化物塩（I_3^-）を澱粉が捉えると黄色から青色に変化する．澱粉そのものが大きな高分子であるため，活性因子であるヨウ化物塩をくっつけたままゲルの網目に捉えられてしまう．一方，抑制因子である亜塩素酸塩はゲルの網目をくぐり抜けていく．こうして，ゆっくりと拡散する活性因子と速く拡散する抑制因子からなる系が実現されたのであった．

CIMA 反応は，おもに次の3つの反応からなると考えられる：

$$\mathrm{MA} + \mathrm{I_2} \longrightarrow \mathrm{IMA} + \mathrm{I^-} + \mathrm{H^+},$$

$$ClO_2{}^* + I^- \longrightarrow ClO_2{}^- + \frac{1}{2}I_2,$$

$$ClO_2{}^- + 4I^- + 4H^+ \longrightarrow Cl^- + 2I_2 + 2H_2O.$$

ただし, MA はマロン酸, IMA はモノヨウ化マロン酸である. $[MA]_0$, $[ClO_2{}^*]$, $[I_2]_0$ の変化は非常に遅いため, 定数と見なして, 上述の反応を $X = I^-$ と $Y = ClO_2{}^-$ に着目して

$$A \longrightarrow X, \quad r_{M1} = k_1[MA]_0,$$

$$X \longrightarrow Y, \quad r_{M2} = k_2[ClO_2{}^*][X],$$

$$4X + Y \longrightarrow P, \quad r_{M3} = \frac{k_{3b}[I_2]_0[X][Y]}{\kappa + [X]^2}$$

という 2 成分の反応系で近似する. r_{M1}, r_{M2}, r_{M3} は経験的反応係数である. さらに, 適当な正定数 α, β, γ を選んで $X = \alpha u, Y = \beta v, t = \gamma\tau$ と正規化すれば, レンジェルとエプスタインによる[5]モデルが得られる:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \Delta u + a - u - \frac{4uv}{1+u^2}, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \sigma\left[c\Delta v + b\left(u - \frac{uv}{1+u^2}\right)\right]. \qquad (16)$$

a, b, c, σ はいずれも正定数である. u が活性因子, v が抑制因子である.

6. まとめ

チューリングが提唱した拡散誘導不安定化による定常パターンを化学反応系で実現するまで約 40 年を要した. BZ 反応の実験および理論的研究が大きく発展したことがそれを可能にした. オレゴネーターに先行する BZ 反応のモデル化としてイリヤ・プリゴジンら[8]によるブラッセレーターがある. これは, BZ 反応系で実際に起きている具体的な反応過程を出発点とするオレゴネーターとは異なり, 振動が起こり得る (化学的根拠のある) 2 成分の反応系を考案したものと言える. また, レンジェル・エプスタイン系 (15)–(16) は, チューリングが予想した化学反応系における拡散誘導不安定化による定常パターン形成を実現した CIMA 反応系を直接単純化したものであり, その体系的な数学的研究は最近始められたばかりである (ニィとタン[7] を参照されたい).

一方, ギーラーとマインハルトが提唱した活性因子–抑制因子系は, 拡散誘導不安定化を起こす非線型性としてどのようなものが可能かという極めて抽象的な考察から導かれた方程式系であり, 多分に概念的なものと位置づけられる. 彼らが想定したヒドラ頭部形成に関与する活性因子とその抑制因子が同定されるかどうかは非常に興味深い問題であるが, こちらは BZ 反応や CIMA 反応の研究とは別の展開をするように筆者には思われる.

なお, 本稿 BZ 反応の項の執筆にあたり, 東北大学多元物質科学研究所の粕谷素洋氏にお世話になりました. BZ 反応の写真は北畑裕之氏, ヒドラの写真や図は中山まどか氏と鈴木香奈子氏に提供していただきました. 感謝いたします.

参考文献

1) B.P. Belousov, "A periodic reaction and its mechanism", *Sb. Ref. Radiats. Med. za 1958, Medgiz, Moscow*, **1** (1959), 145–147.
2) V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade and P. De Kepper, "Experimantal evidence of a sustainded standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern", *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), 2953–2956.
3) I.R. Field, I. Körös and R.M. Noyes, "Oscillations in chemical systems II. Thorough analysis of temporal oscillations in the bromate-malonic acid system", *J. Amer. Chem. Soc.* **94** (1972), 8649–8664.
4) A. Gierer and H. Meinhardt, "A theory of biological pattern formation", *Kybernetik* (Berlin) **12** (1972), 30–39.
5) I. Lengyel and I. Epstein, "A chemical approach to designing Turing patterns in reaction-diffusion systems", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **89** (1992), 3977–3979.
6) J. Murray, "Mathematical Biology, Vol.I", Second Edition, Springer (2002).
7) W.-M. Ni and M. Tang, "Turing patterns in the Lengyel-Epstein system for the CIMA reaction", *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 3953–3969.
8) G. ニコリス, I. プリゴジン,『散逸構造:自己秩序形成の物理学的基礎』, 岩波書店 (1980).
9) A.M. Turing, "Chemical basis of morphogenesis", *Proc. Roy. Soc. London Ser. B* **237** (1952), 37–72.
10) 吉川研一,『非線形科学—分子集合体のリズムとかたち』, 学会出版センター (1992).
11) A.M. Zhabotinsky, "Periodic processes of the malonic acid oxidation in a liquid phase", *Biofizika* **9** (1964), 306–311.

(たかぎ・いずみ, 東北大学大学院理学研究科)

リレー連載

人物で学ぶ物理

創始者の思考で学ぶ

第1回

連載を始めるにあたって

「人物で学ぶ」雑感

米谷 民明

本誌では新しいリレー連載として「人物で学ぶ数学」,「人物で学ぶ物理」を開始することになり，今回は物理の連載を始めるにあたっての前口上役を私が仰せつかった．本誌では，これまでも人物を取り上げた特集をしばしば組んできている．最近の特集としては,「ディラック」(2007/9),「ポアンカレ」(2008/10),「シュレーディンガー」(2009/9),「南部陽一郎」(2010/9) がある．本連載は，これらの人物特集とは別に，各号ごとに一本ずつの解説記事として，物理学のこれまでの発展の中で大きな役割を果たした人物を取り上げ，関連深い分野の研究者の方々にそれぞれ自由な切り口で紹介していただこうという企画である．通常の特集号における特集テーマごとの個別解説記事とは一味違った角度からの，興味深い記事が連載されるものと楽しみである．

科学，特に自然科学において人物が果たす役割は，同じ人間の活動の中でも，美術，音楽，小説，映画，…などの芸術活動においてとは大いに異なっていることは言うまでもない．芸術分野では，その「成果」はまさに芸術家という特定の人物の「作品」そのものである．私たちが芸術作品を鑑賞するのは，様々に異なる仕方であるにしても個々の作品に直接，間接に私たち自身が接して感じ，考えることによっている．

これに対して，物理学の論文を「作品」と呼ぶことは普通はない．しかし「仕事」と呼ぶのはふさわしい．研究者の仕事の寄与が広く認められて，その結果や提唱された方法が確立した段階では，ある共通認識・理解が成立し，一定の範囲で物理学の成果として広範囲に共有されるものとなる．そうなると，もとの論文＝「作品」そのものに接する必要性は，一般には薄くなる．古典力学を学ぶのに，ガリレイやニュートンの著作までたどって勉強する人は，現在では科学史としての興味から調べる人以外では，ほとんどいない．そこまで遡らずとも，例えば素粒子論を学ぶのに50年前，60年前の論文から始める学生も極めてまれである．

他方，現代の私たちは，バロック音楽，中近世の絵画，等々，数百年前に発表された芸術作品にでも，私たちと同時代の作品とそれほど変わらない態度で，当り前のように接して，鑑賞者個人ごとに直接味わうことができ，時には同時代の作品に勝るとも劣らないような強い感動を受けることもある．

もちろん，自然科学者も芸術家も等しく時代の子である．芸術作品についても，各時代ごとに，国や地域を超えて広く影響を持つ芸術運動や時代思潮があり，ある程度は似た側面がないわけではないにしても,「共有」するという意味は，自然科学

とは全く異なると言うべきだろう．

物理学に限らず自然科学の「共有認識」は，比喩的には，開発が順調に進んでいる鉱脈のようなものと言えなくもない．鉱脈の発見は，最初はある個人やその協力者たちというごく少数の人間の努力で始まるだろう．時には，その努力は，偏見，無視，妨害などを含む多くの困難に抗してなされなければならない．その中で，彼らはそれぞれ独自の経験，勘，考え方を背景にして，過去の成果や方法を学び，身につけながら，小さくとも新しい鉱脈を発見してゆくだろう．鉱脈の価値や有効性が認識されるにつれて，それは一種の共有財産として広く利用され，多くの人が参加した大規模な形でさらに開発する努力が払われる．一旦そうなれば，如何にして発見されたか，誰によってなされたかは問わなくても，鉱脈の利用の仕方をマニュアル＝教科書によって学び，その恩恵を十分に享受できるし，さらなる開発に参画することができる．また，そこから新たな鉱脈の探求にも乗り出せるというわけだ．

そのような立場から言うと，物理学上の人物に興味を持つのは，「鉱脈」を利用したり開発したりというより，その発展の歴史と，そこに貢献した人物の生き方そのものに興味を持つ場合が多いに違いない．史上の大発見を成し遂げたり，発展に独創的な寄与をしたような人物は，時代の制約の中で，他の人にはない独自な「生き方」や「物の見方」をしているであろうから，たとえ物理学の中身には深い興味はなくとも，何らかの仕方で学ぶところはあるし，時と場所の違いを超えて広く関心を集めるのは当然である．どういう形態であろうが，世界，自然，そして人間を理解したいという意欲が続く限り，偉人の生き方は，私たちに共通の関心事だからである．

だが，「鉱脈」開発の当事者，あるいは当事者になろうと勉学を進めている人にとっても，「人物」から多くのことを学べることも確かな事実だ．例えば，物理学の新しい成果を学び吸収するのに，それが大きな貢献であればあるほど，そのような寄与をした本人から直接話しを聞くのは，仮にその内容が教科書のように客観的な観点から整理されたものではなかったり，後から見ればいくらか見当違いな側面があるにしても，他に代えられないような貴重な体験になるのは，研究者なら誰しも，しばしば経験することだろう．研究者でなくても，科学に関心を持ち積極的に学ぼうとする人は，似た経験をしているのではないだろうか．新たな発見というものは，後の発展とのつながりを知ってしまえば，ごく自然な当り前のことのように見えるとしても，正しい認識にいたる過程では，様々な迷い，誤り，見込み違いなどの紆余曲折に満ちたものだ．また，場合によっては，他人からの無理解や無視に耐えなければならないこともある．そうした経緯の理解により，仕事の意味がより深く伝わってくるのである．それは，本人の論文を直接読んだとしても簡単には読み取れないこないこともあり，ましてや教科書ではなかなか学ぶことは難しい．

そうした発見，創造の過程をある意味で「追体験」することは，それ自体としても「面白いこと」であるし，また「鉱脈」そのものの理解を深め新たな展望を得るのに役立たないはずはない．そして，新たな「鉱脈」の探求へと人を勇気づける刺激にもなる．物理学研究者の中には，例えば，量子力学が形成された 1924 年あたりからの数年間の，物理学史上でも稀に見る目眩くような発展，またそれに貢献した人物群像，特にハイゼンベルク，ディラック，パウリなどまだ 20 代半ばの若者たちの活躍を学び，忘れられない知的興奮を味わった経験を持つ人が多いと思う．

物理学，ひいては自然科学一般において「人物で学ぶ」とはどういうことなのか，私の感想を述べた．本連載では，人物の伝記的な解説というよりも，人物を通してその人の開拓した物理そのものの理解を進めるのに加えて，その位置付け，最近の進展との関係などについても，読者は興味と認識を深めていただきたいものと思っている．次回からの記事に期待して，いわずもながの前口上は終わりにしよう．

（よねや・たみあき，放送大学教養学部）

カントルと集合論

田中 一之

1. はじめに

集合論は，19 世紀末にドイツの数学者カントル(1845～1918) が創始したと言われる．そこで，簡単なクイズをひとつ．

> [問題] 次の記号の中で，カントルが考案したのはどれか？
>
> $\{x\}$,　$\varnothing$,　$\in$,　$\cup$,　$\subset$.

後で詳しく述べるように，カントルは三角級数の研究から出発して，その土台となる実数の無限集合を扱うために，濃度や順序数の概念を導入した．だが，それらの概念まで集合として扱うような現代集合論的企図は彼にはなかったし，集合演算を代数的に捉えるような見方もしていなかった．だから彼が論文で使った記号は，中括弧の記法 $\{x\}$ だけである．但し，これは単元集合を表すものでなく，x の動く範囲（内包条件）は別に記される．

他方，カントルよりひとまわり年長の友人デデキント（1831～1916）は，ほぼ同じ頃にやはり実数の研究をしながら，その土台の集合論自体にも関心を持った．1888 年に出版された『数とは何か，何であるべきか』（文献 9）に収録）では，集合に関する基本概念（部分集合，写像，順序など）を規定し，それを用いて「数」を定義するという大凡今日的な議論を展開している．もっとも，この本でも集合に関する記号法は現代のものとは大きく違っていて，しかもそれは「説明」されるだけで，厳密に定義されていない．

集合に関する記号を最初に統一的に定め，普及させたのはホワイトヘッドとラッセルによる大著『プリンキピア・マテマティカ』（1910～1913）である．しかし，この本では中括弧 $\{x\}$ の使い方と空集合記号がいまの集合論とは異なっている．そもそも『プリンキピア』が扱っているのは「集合論」ではなく，それよりも文法的に複雑な「型理論」であるため，集合（そこでは「クラス」と呼ばれる）は，中括弧の記法では表しにくい．また『プリンキピア』では，全体集合の V と対比して，空集合には Λ が使われた．空集合記号 Λ も，昔の論文（例えば，ゲーデルの論文）ではよく用いられたが，現代の主流はブルバキ（1939）が使い始めた（ヴェイユの証言）とされるノルウェー・デンマーク文字 $\varnothing$ である．なお，集合代数の流儀で空集合に 0 や $\emptyset$ も使われることがあるが，ギリシャ文字の ϕ は誤用といえるだろう．

というわけで，数学の言葉としての「集合論」の開祖といえばデデキントであり，その普及にはラッセルやブルバキらの貢献が大きかったのだが，それでもなおカントルをもって集合論の祖というの

はどうしてだろうか？ 実数の非可算性を示した例の対角線論法によるものだろうか？ いや，そうではない．他のところ[14]でも述べたが，対角線論法の発明者はカントルとは言えないし，またカントルの最初の非可算性証明は，対角線論法ではなく，区間縮小法を使った議論である（後述）．さらに附言すると，すべての実数が無限小数で表せる事実にカントル（とデデキント）が気付いたのは1877年で，実数の非可算性の最初の証明（1874）よりも後である．

以上からわかるように，カントルにとって，集合の記号法や証明技法は重要でない．彼の企ては，古代ギリシャの時代に逆理の元凶として数学から追放された**実無限**（actual infinity）を召還し，新しい市民権を与えようとするものだ．カントル以前にも「無限」は数学の議論の端々にシッポを出していたが，正しい数学者は怪力乱神に加え「無限」も語るべきでないとする雰囲気が当時のヨーロッパにはあった．カントルもドイツ正統派の数学者の道を歩んでいたので，初めから無限論をやろうとして始めたわけではない．たまたま三角級数の一意性というオーソドックスな問題に取り組み，その一般化について考えを巡らすうちに，「無限」の世界に迷い込んでしまったのだ．関数の土台となる実数集合の性質を捉えようと進めば進むほど，巨大な謎が濃い霧となって行く手を阻み，その迷霧を払い除けるために新しい数学理論と哲学的立場が必要になった．それがカントルの無限論であり，集合論である．

彼の主要論文の一つ『線上無限点集合論』の第5部「一般多様体論の基礎について」（1883）と，それを補足する「実無限に関する様々な立場について」（1885）で，カントルは実無限とは何かを論じている（どちらも文献7）に和訳がある）．「数学の本質はその自由さにある」という名言は，前者の終わりのほうに現れる）．これらの論文（とくに後者）でカントルが主張していることは，実無限には大凡3種類あって，彼はそのすべてを肯定するというものだ．第一は，神の中にあり，完全であって，それ以上拡大できないような「絶対無限」．

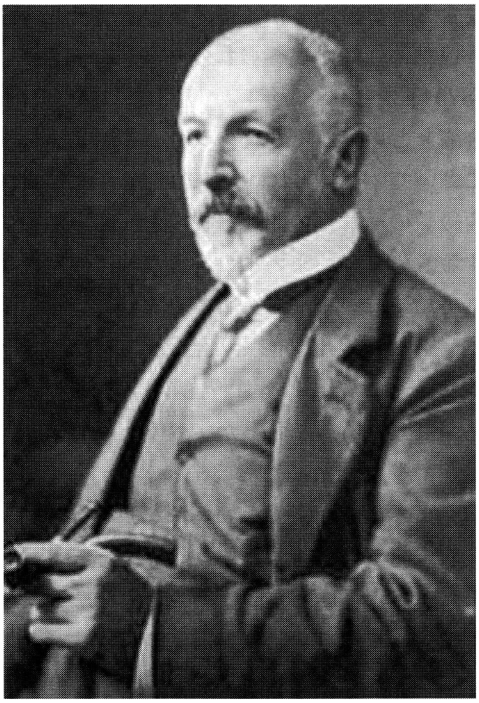
人物＼無限の種類	数学的	物理的	絶対的
A・ロビンソン	×	×	×
プラトン	×	○	×
トマス・アクィナス	×	×	○
ブラウワー	×	○	○
ヒルベルト	○	×	×
ラッセル	○	○	×
ゲーデル	○	×	○
カントル	○	○	○

第二は，神が創造された世界に生じる「物理的無限」．第三は，人間の理性によって把握される「数学的無限」である．ここで，集合論の博士号をもつ異色のSF作家ルディ・ラッカーの説を持ち出すと，この3種類の無限のどれを認め，どれを認めないかで8通りの立場ができ，それぞれに最も相応しい人を選ぶと，表のようになるという（文献8), p.309）．

禁断の楽園に足を踏み入れたカントルが，旧勢力からのイジメを受けて神経症に陥るという物語は，ベルの本[1]が出所であると思われるが，イジメと神経症の関係については十分な根拠がない．そもそもカントルはそんなに気弱な男ではなかった．彼は自分の理論の正当性を世に訴えるために，ドイツ数学会DMVを組織して初代会長となり，さらに国際数学者会議ICMの発足の音頭をとった．そのような公開討論の場で旧勢力を叩きのめすつもりだったのだ．ところが，それらの開催前に敵将クロネッカーが死んでしまうので，カントルの不戦勝となり，どちらの会も彼の後援会になってしまった感がある．1897年の第1回国際数学者会議（ジュネーブ）では，カントルの業績を讃える講演が続き，1900年の第2回パリ会議ではヒルベルトが「カントルの連続体問題」を現代数学の重要問題の筆頭にあげた．

2. 無限の階段を駆け上る

カントルの歩みを辿る前に，当時のドイツ数学界の様子を一瞥しておきたい．19世紀初頭，数学研究の中心はパリにあったが，ドイツの田舎町ゲッチンゲン（「月沈原」とも書く）で天文台長をしな



ゲオルク・カントル（1845〜1918）.

がら，独自の数学宇宙を創出したのがガウスである．そのガウスが1855年に亡くなると，彼を崇拝していたディリクレがベルリン大学教授の職を捨ててゲッチンゲンに赴任し，パリ仕込みの解析的手法を用いてガウスの整数論を整理し，発展させた．だが，その彼も1859年に亡くなり，そのあとをガウスの弟子リーマンが継ぐ．他方，ディリクレの移動で空いたベルリン大学教授の席についたのが整数論のクンマーであり，さらにその後任の座につくのがクロネッカーであった．当時，ベルリン大学にはもう1人，現代解析学の父と呼ばれる高名な教授ワイエルシュトラスがおり，クロネッカーは彼を天敵と見なしていた．

さて，ゲオルク・カントルは，1845年に帝政ロシアの首都サンクトペテルブルクでデンマーク出身の実業家の長男として生まれ，11歳までそこで過ごした．ドストエフスキーの小説『罪と罰』の舞台になったのが，ちょうどその頃のペテルブルクである．カントルは，その後ドイツとスイスで教育を受け，最終的にベルリン大学で，クンマーとクロネッカーの指導のもと整数論を学び，1867年に二次不定方程式の整数解に関する研究で博士号を取った．そして，ベルリンとゲッチンゲンの中間に位置するハレの大学で教職についたが，そこにワイエルシュトラスの影響を強く受けたハイネがいた．ハイネは，今日ハイネ・ボレルの被覆定理で知られるように，位相空間論の先駆者の一人である．彼との出会いが，カントルの人生を大きく変化させていった．

カントルは，1870〜72年に三角級数（フーリエ級数）の一意性についての論文を，当時最も水準が高いとされていた数学誌であるクレレ誌に発表した．ここで，**三角級数**と呼ばれるのは次のような無限級数である．

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx).$$

カントルが証明した定理は，異なる三角級数は異なる関数を表現するというものである．換言すれば，すべての実数 x における値 $f(x)$ を定めれば三角級数（の係数 a_n, b_n）は唯一つに定まるというものである．この一意性の問題は，ディリクレ，リーマン，そしてハイネも挑戦した難問で，その解決によりカントルは数学界で一躍脚光を浴びた．と同時に，これはクロネッカーが敵視するワイエルシュトラス派への歩み寄りと取られかねない危険な仕事の第一歩でもあった．

さらにカントルが考え進めたことは，すべての実数 x における値を定めなくても，三角級数は一意に決定できるのではないかということである．有限個のデータを消去してもそれ以外から全体を復元できることは比較的容易にわかる．では，どれだけデータを消去できるかというのが次の問題である．ここで少々数学用語が必要である．A を三角級数の定義域となる区間 $[0, 2\pi]$ の部分集合としておこう（三角級数は周期関数である）．実数 x が A の**集積点**であるとは，x が A の（x 以外の）点列の極限として表されることをいう．いま，A の集積点の全体を A' と記し，A の**導集合**（derived set）と呼ぶ．すると，A が有限であることと $A' = \varnothing$ とは同値条件である．次に，A' の導集合 $A^{(2)} = A''$ を考える．$A' \neq \varnothing$ で $A^{(2)} = \varnothing$

となるとき，A は有限個の集積点をもつ可算無限集合であり，全体として密度が薄い感じの集合である．そして，このような集合の点のデータは消えても三角級数全体が復元できることをカントルは示した．同様に，$A^{(2)}$ の導集合として $A^{(3)}$, $A^{(3)}$ の導集合として $A^{(4)}$ 等々を作っていって，どこかで空集合が現れれば，A はデータを消してよい点の集合になる．これらの結果は，数学年報（アナーレン）に発表された．

続いて，集合論の原点とされる 1874 年の論文で，カントルは「連続体が非可算である」ことを証明した．その証明法は，いわゆる対角線論法ではない．簡単に見ておこう．もし連続体 R が可算であるとすると，それらの点を一つ一つよけながら，縮小閉区間の加算無限列を作っていくことができる．すると，その区間列全体の共通部分に入る点はなくなるはずだが，他方実数の連続性（ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの性質）からこれは空にはならないので矛盾である．さらに，この論文では，有理係数多項式の根として定まるような代数的数は可算個しかないことが示され，実数のほとんどが方程式等で表現できないという事実も導かれた．カントルはしたたかにも，この補足的結果を前面に出し，あたかも興味の中心が代数方程式にあるが如く装って，クレレ誌に論文を発表した．この雑誌は，クロネッカーが編集委員として発言権を持っていたからである．

1877 年，カントルは R^n と R の濃度が等しいことを証明した．これに先立って，カントルはデデキントと何度も手紙をやりとりして，その中でこの事実の発見の心境を，「我見るも，我信ぜず（Je le vois, mais je ne le crois pas)」とフランス語で表現している．すでに論文掲載の実績もあるので，このような重要な結果はクレレ誌にもすんなり通るとカントルは思ったが，その読みは甘かった．クロネッカーの横槍で掲載が翌年に引き延ばされた．裏事情を知ったカントルはクレレ誌には二度と論文を投稿しないと決意し，クロネッカーのほうもさらにカントルへの監視を強めることになった．なお，この論文の最後には，「どんな実数の集合も可算であるか，連続体の濃度をもつ」という**連続体仮説**が述べられている．

1879 年から 1884 年にかけては，「線上無限点集合論」という題で 6 編のシリーズ論文を数学年報に書いている．これは，1870～72 年に彼自身が三角級数の一意性の問題を扱った研究を超限に拡張するもので，いよいよカントル独自の世界が作られていく．いま，A の導集合を A'，A' の導集合 $A^{(2)} = A''$，$A^{(2)}$ の導集合として $A^{(3)}$ 等々を作っていくと，$A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset A^{(3)} \supset \cdots$ という関係が成立する．これらがすべて空でないとしたらどうだろうか？ このとき，$A^{(\infty)} = \bigcap_{n\in N} A^{(n)}$ とおくと，これも空でないことがわかる（コンパクト性の概念を使う）．そこで，さらに $A^{(\infty)}$ の導集合として $A^{(\infty+1)}$，$A^{(\infty+1)}$ の導集合として $A^{(\infty+2)}$ 等々のような減少列を考えることができる．そして，$A^{(\infty+\infty)} = \bigcap_{n\in N} A^{(\infty+n)}$ も自然に定義される．さらにこの操作を続けて，どこかで空集合が現れれば，A はデータを消してよいまばらな点の集合になる．このような考察を経て，カントルは順序数の概念に到達したのである．6 編の論文を通じて，無限論としての集合論建設のためのいろいろな試みが述べられる．とくに第 5 部は，「一般多様体論の基礎について」(1883) という題名で発表され，無限に対するカントルの態度が鮮明に打ち出された．

これらの結果が発表された数学年報は 1868 年に創刊されたばかりで，1826 年創刊のクレレ誌のように国際的評価の高い雑誌ではなかった（20 世紀に入ると年報も有名になり，ヒルベルトが論敵ブラウワーをこの雑誌から閉め出すといういざこざが起きた）．そこで，カントルを国際舞台に引き出そうと登場したのが，スウェーデンのミターク＝レフラーである．彼自身も優秀な数学者であるが，大富豪の令嬢と結婚して財を得，国際誌『アクタ・マテマティカ』（以下，アクタ誌）を創刊して，若手数学者を支援しようと試みた．1883 年から 85 年にアクタ誌は，カントルの昔の論文まで次々とフランス語に訳して掲載した．20 世紀の初頭，フランスの数学者ボレル，ベール，ルベーグ，アダ

マールらが集合論を発展させたのはこのフランス語訳と無縁ではないはずだ．

3. 頂上は雲の中

1884年，カントルはついに連続体仮説の証明が完成したと思って論文にし，それをアクタ誌に投稿した．しかし，すぐ自らの証明の過ちに気づいて投稿を取り下げることになる．彼が最初の精神病の発作を起こしたのは，その頃である．連続体仮説への過度の集中が彼の精神を蝕んだに違いなかった．そして，カントルはこの呪縛から逃れるためか，シェイクスピアの研究を始め，シェイクスピアがベーコンと同一人物であるという当時流行の奇説の証明に没頭する[2]．最初の発作は一時的なものであったが，後年に度々繰り返すようになった．

どんどん哲学色を帯びるカントルの研究に，アクタ誌を編集するミターク＝レフラーも手を焼いた．そして，ついにアクタ誌もカントルの投稿論文に対して掲載拒否を決めた．これで，カントルはクレレ誌とアクタ誌という有力2誌から閉め出されたことになった．それでも，カントルは挫けるどころか，国内外からの支持を背景に，ドイツ数学会DMVを立ち上げるという英断に出た．そして，1890～93年にドイツ数学会の初代会長を務め，91年に第1回会議をハレ大学で開催した．彼の対角線論法の論文「集合論の一つの初等的問題」は，その年会誌の創刊号（1891）に掲載されたものである．但し，この論文の真価は，実数の非可算性の証明よりも，どんな集合に対しても，そのベキ集合をとることで，より高い濃度の集合が存在する事実を証明したことにある．

カントルの最後の数学論文である「超限集合論の基礎に対する寄与」（数学年報1895～1897）では，超限順序数論が系統的に展開される．超限基数は，$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ と名付けられ，**連続体仮説** CHは，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ と表現された．ただし，カントルはこれを「仮説」とは呼んでおらず，証明が見つかっていない真理と考えた．

1900年にパリで開かれた第2回国際数学者会議で，ヒルベルトが23の重要問題（のうち10個）を発表した際に，第一問題とされたのが連続体仮説であり，以来この問題は世界中から注目されるようになった．出題の際にヒルベルトは，第一問題を解決する鍵になるのが，連続体の整列可能性であると述べている．このとき，カントルはすでに精神的な病いがかなり悪化しており，会議には参加していない．

1904年，ハイデルベルグの第3回会議では，J. ケーニヒが連続体は整列可能でなく，連続体仮説も成り立たないという趣旨の講演をした．病み上がりで列席したカントルは，この講演を聴いて激昂したという．会議のすぐ後で，ツェルメロがその議論の間違いを発見し，ある原理を仮定すれば，すべての集合の整列性が導けることも示した．その原理は今日**選択公理** ACと呼ばれるもので，「互いに共通部分をもたない空でない集合からなる空でない集合に対しては，その要素の各集合とちょうど一つだけ要素を共有するような集合が存在する」という主張である．

その後，カントルの病状は一段と悪くなり，1905年に大学を休職し，1913年に定年を迎えた．そして，1918年ハレの療養所で心臓発作で亡くなった．

4. その後の集合論

最初は連続体問題を解く鍵と考えられた選択公理が，集合論に新たな論議の種を生んだ．1904年から1905年にかけて，フランスの数学者ボレル，ベール，ルベーグ，アダマールが選択公理をめぐってとり交わした興味深い手紙（和訳[10]）がある．また，1906年には，イタリアのヴィタリが，選択公理によって（ルベーグの意味の）非可測集合が構成できることを示した．選択公理も，整列定理も，当初の反応はほとんどが否定的であった．

ツェルメロは，1908年に選択公理から整列定理を導く別の証明を考案した．それに関連して，選択公理以外の集合論の公理を整理した．その公理は，外延性，初等集合（空集合，単元集合，対集合），分出公理，ベキ集合，和集合，選択公理，無限公理の7つであった．これらは，今日ツェルメ

ロの集合論 Z と呼ばれるものに相当する．

同じ頃，ハウスドルフは，ツェルメロとは違う観点から集合論の研究に着手していた．カントルの集合論の射程があくまで実数論にあったのに対し，ハウスドルフは一般の順序集合や位相空間について考察した．1908 年に彼は，**一般連続体仮説** GCH を $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ として定義した．そして，1914 年には，のちの**バナッハ・タルスキの逆理**（1924）のプロトタイプになるパラドクスを発見している．それは，選択公理の下で成り立つ，次のような主張である．球面を 3 つの部分 A, B, C に分割して，A, B, C および $B \cup C$ が互いに合同となることができる．バナッハとタルスキは，選択公理による類似した議論を 3 次元の立体について行い，1 個のりんごを有限個に分割し，それを別な仕方で組み合わせると，地球 1 つを作ることも可能であることを示した (文献 11) を参照)．これらは，選択公理に対する疑念をさらに強めた．

一方，1916 年には，ボレル集合については連続体仮説が成り立つこと（すべてのボレル集合は可算もしくは連続濃度であること）をハウスドルフとアレクサンドルフが独立に証明した．**ボレル集合**というのは，開集合と閉集合から，集合の可算演算によって構成させるものである．同じ年（ロシア革命の前年)，モスクワ大学のルージンの学生スースリンは，ボレル集合の連続像（射影）が，ボレル集合族より真に大きな集合族を形成することを発見し，翌年にはその族（その要素は解析集合と呼ばれる）についても連続体仮説が成り立つことを示した．スースリンは若死にし (1919)，その研究はルージンとシルピンスキーが引き継ぎ，**記述集合論**として発展する．

1920 年代初め，フレンケルとスコーレムが，ツェルメロの公理系に**置換公理**を追加することを別々に主張している．これがないと，例えば

$$\{\omega, \mathcal{P}(\omega), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))), \ldots\}$$

は，集合として扱えない．さらに，スコーレムは，分出公理や置換公理は図式で表され，その条件文は集合論の形式言語における任意の論理式であることを注意した．他方，フォン・ノイマンは，集合の集まりであるクラスを用いることで，分出公理や置換公理をそれぞれ単一の論理式で表した．この体系は，BG（ベルナイス・ゲーデルの意）もしくは NBG（ノイマン+BG）と呼ばれる．また，彼は，順序数や基数に対し，今日風の形式的定義を与え，超限帰納法なども定式化した．

1930 年，ツェルメロは ZFC（=ZF+選択公理 AC）に対する一つの標準的なモデル V を与えた．それは**累積階層**と呼ばれ，次のように超限再帰的に構成される．

$$V_0 = \varnothing, \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha),$$
$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \quad (\lambda \text{は極限順序数});$$
$$V = \bigcup_{\alpha} V_\alpha.$$

この構造 V が，ZFC の公理をすべて満たすことは比較的容易に確かめられる．この事実によって，ZFC の整合性に対するある種の信頼感が得られた[12)]が，厳密な意味でそれを保障するものではない．例えば選択公理がこの V の中で成り立つというのは，V を作った外の世界でも選択公理が成り立っているということに過ぎない．

ゲーデルは，累積階層の構成法を精錬して，外側で選択公理や連続体仮説が成り立っていようがいまいが，内部では必ずそれらが成り立つようなモデル L を作った．これによって，それらの公理の相対無矛盾性を証明したのである．すなわち，1938 年の論文に述べられたゲーデルの主張は，「ツェルメロ・フレンケルの集合論 ZF が無矛盾であれば，選択公理と一般連続体仮説をそれに加えても無矛盾である」というものである．

これに対して，選択公理や連続体仮説を成り立たせないようなモデルを構築したのが，1963 年のコーエンの仕事である．ゲーデルは内部に構成的なモデル L を作ったのに対して，コーエンは**強制法**と呼ばれる手法によって，外部に投影されるモデルを作った．コーエンとゲーデルの結果を併せることで，連続体仮説は集合論 ZFC から証明も反証もできないことがわかった．しかし，これは

ZFCの公理が不完全だというだけで，問題の解決にはならない．では，どうやって集合論の公理を完成させるかということになる．

ゲーデルは，可能な限り大きな集合の存在を認めるような「巨大基数公理」を付け加えることで，多くの決定不能問題が判定できるようになると考えた．しかし，いろいろな実例から，この方向で連続体仮説のような興味ある命題の真偽が決着する見込みはないと思われるようになった．他方，巨大基数公理は，無限2人ゲームの決定（どちらかのプレーヤーが必勝法をもつこと）に効果を発揮した．興味深いことに，2階算術（形式的実数論）で記述できるゲームに対する決定性はやはり2階算術で記述でき，これを公理にすれば2階算術のほとんどの命題が判定できる．つまり，ペアノの1階算術が自然数論に対する事実上完璧な体系であるのと同じように，決定性公理を加えた2階算術の体系も完璧な体系である．しかし，連続体仮説は3階算術の命題なので，この議論をどうやって3階に拡張するのかが次の問題である．この難題へのアプローチの一つとして，論理規則を強める方法をウッディンが提唱している．シンタックスを持たない新しいΩ論理の下で，妥当な前提から$2^{\aleph_0}=\aleph_2$が証明できることを彼は示した．これが本当に連続体仮説を否定することになるかどうかは今後さらに多くの考察が必要である．カントルの残した無限の謎は，21世紀もまだ生き続けている（詳しくは文献15)を参照）．

5. 文献案内

カントルの人物伝については，1937年に書かれたベルの本[1)]の最終章が，現在でも最も広く読まれている．その記述の不正確さについてはいろいろ批判されているが，やはり一般的な読み物として秀逸であり，ノーベル経済学賞のジョン・ナッシュを初め，この本の感化で数学者を目指した人も多い．最近出版されたものとしては，アクゼル[2)]やヘルマン[3)]なども読みやすい．さらに詳しくカントルの人と仕事について知りたい方は，ドーベンによる本格的伝記[4)]もある．

カントルの集合論の仕事については，ツェルメロが編集した論文集[5)]がまず必携の資料である．晩年の集大成「超限集合論の基礎に対する寄与」と，そのツェルメロの注釈は，文献6)に和訳がある．この和書には，いわゆる対角線論法の論文（1891）の訳も載っている．また，「一般多様体論の基礎について」の部分訳（岡本賢吾，戸田山和久，加地大介訳）と，「実無限に関する様々な立場について」（三上真司訳）が文献7)に収録されている．

カントル以後の集合論については，文献10, 12, 13, 15)を参照．とくに，拙編著書[15)]は，この文章と同様の趣旨で集合論の発展をより詳しく解説しているので，興味を持たれた方はそちらも併せてご覧いただければ幸いである．

参考文献

1) E.T. ベル，田中勇・銀林浩訳『数学をつくった人々』，東京図書 1997（ハヤカワ文庫 3 巻本，2003）．
2) アミール・D・アクゼル，青木薫訳『「無限」に魅入られた天才数学者たち』早川書房 2002.
3) ハル・ヘルマン，三宅克哉訳『数学10大論争』，紀伊國屋書店 2009.
4) J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, プリンストン大学出版，1990.（初版は，ハーバード大学出版 1979.）
5) E. Zermelo 編, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer 1932.
6) カントル著，功刀金二郎，村田全訳・解説『カントル超限集合論』，現代数学の系譜 8，共立出版，1979.
7) 『神の数学　カントールと現代の集合論』哲学 II-5，哲学書房，1988.
8) Rudy Rucker, *Infinity and the Mind*, プリンストン大学出版，2004（初版は，Birkhauser, 1982）．
9) デーデキント著，河野伊三郎訳『数について』岩波文庫，1961.
10) 田中尚夫，『選択公理と数学』，遊星社 (1987), 増訂版 (2005).
11) 砂田利一，『バナッハ・タルスキーのパラドックス』岩波書店〈岩波科学ライブラリー〉，1997.
12) M. ジャキント，田中一之監訳，『数学の基礎の哲学的論考：確かさをもとめて』，培風館，2007.
13) 田中一之，鈴木登志雄共著『数学のロジックと集合論』，培風館，2003.
14) 田中一之「対角線論法なしの数学基礎論」，『数学の楽しみ』2004年夏号，日本評論社.
15) 田中一之編『ゲーデルと20世紀の論理学（ロジック）』第4巻「集合論とプラトニズム」，東京大学出版会 2007.

（たなか・かずゆき，東北大学大学院理学研究科）

特　集（2011年4月号予告）

物理学と多様体

幾何学構造がもたらす物理学の理解

本体952円

特　集（2011年2月号）

物理現象を読み解く数学的手法

統計物理のための新しい数学

本体952円

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

特集にも出てくる2次方程式の解の公式を最初に習ったのは中学生の頃だったかと思います．中学生の頃ですから，まだ，複素数は習っていないので，実数の範囲のみの話でしたが，導出する過程を聞いて，なるほどと思ったものです．

その後，大学に入って3次方程式の解の公式を勉強する機会があったので，やってみましたが，2次のときよりも頭を使わなければならなく，よい頭の体操になったことを覚えています．

また，今回の特集では例題や問題がある記事もあります．解の公式とあわせて，チャレンジしてみてはいかがでしょうか．

ところで，1月号の後記でも書きましたが，今年はガロア生誕200年です．今回の特集ではガロア理論に関係したことも取り上げられており，「名著に親しむ」のコーナーではガロア理論に関した本も挙がっております．最近ではガロア本人に関する本も出ていますので，興味が湧いた方は是非とも手にとって見て下さい．ガロアがどういった環境で数学を研究していたかが，わかるのではないでしょうか．　(R)

数　理　科　学　3月号

2011年3月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社　**サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）

〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁